UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté d'éducation

Maîtrise en sciences de l'éducation

Genèse documentaire communautaire: cas d'un collectif d'enseignants travaillant sur une ressource visant le développement de la pensée algébrique

Par Audrey B. Raymond, 14133975

Traval présenté à Hassane Squalli, Adolphe Adihou et Marie-Pier Morin

Dans le cadre du cours de Mémoire

EDU801

23 décembre 2016

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES SIGLES ET DES ACRONYMES

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

PFEQ: Programme de Formation de l'École Québécoise

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

La recherche présentée dans ce travail s'inscrit dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques portant sur le développement de la pensée algébrique ainsi que ceux portant sur le travail de l'enseignant[1]. Par ailleurs, cette recherche a été réalisée dans le contexte d'un projet de recherche formation regroupant deux didacticiennes des mathématiques, une conseillère pédagogique et des enseignants du secondaire et porte sur l'intégration, dans la pratique d'enseignement des mathématiques, des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique. Cette perspective du développement de la pensée algébrique s'inscrit dans une problématique à laquelle de nombreux chercheurs s'intéressent depuis déjà quelques décennies et qui a donné naissance à une nouvelle perspective, nommée *Early Algebra*. Cette perspective vise le développement de la pensée algébrique chez les élèves avant l'introduction du langage formel de l'algèbre et a déjà influencé plusieurs programmes par sa nouvelle façon de penser l'enseignement de l'algèbre, notamment dans les provinces canadiennes anglophones, les États-Unis, l'Australie et plusieurs autres.

Bien que le programme québécois actuellement en vigueur ne s'inscrive pas explicitement dans cette perspective, plusieurs initiatives locales, comme la traduction des manuels de l'Ontario et des journées de formation à l'intention des enseignants et des conseillers pédagogiques de la part des didacticiens dans les écoles, ont vu le jour dans le milieu scolaire québécois afin de viser le développement de la pensée algébrique avant l'introduction de l'algèbre. Plusieurs ressources ont été développées dans ce sens et sont accessibles aux enseignants. Malgré la disponibilité de ressources, les pratiques des enseignants n'évoluent pas pour autant dans les classes. Un processus d'intégration et de conceptualisation de la part de ces derniers est nécessaire pour s'approprier ces ressources et les intégrer dans leur pratique. Dans cette recherche, nous nous intéressons à ce

---

[1] Note: Le masculin est utilisé tout au long du texte afin d'en alléger la lecture, et ce, en toute considération et en tout respect pour la politique rédactionnelle non sexiste de l'Université de Sherbrooke.

processus d'intégration d'un groupe d'enseignants au fil des usages d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique.

Ce document, composé de cinq chapitres, présente donc les grandes étapes de la recherche. Dans le premier chapitre, nous dévoilons la problématique de notre projet en commençant par les problématiques dans l'enseignement de l'algèbre qui ont mené à un mouvement de réforme international. Early Algebra, une perspective née suite à cette remise en question, réfère à la fois à un domaine de recherche, une perspective curriculaire et un domaine de formation des enseignants. Nous y présentons notamment des définitions de certains concepts importants, comme l'algèbre et la pensée algébrique et nous mettons en évidence comment cette nouvelle perspective apporte des changements aux programmes de formation. Aussi, nous abordons comment les enseignants, novices dans cette nouvelle perspective, peuvent être formés pour viser le développement de la pensée algébrique au primaire. Nous terminons ce chapitre en y présentant le contexte de notre étude ainsi que l'objectif général de la recherche.

Le deuxième chapitre aborde trois cadres méthodologiques qui nous aideront à analyser ce processus d'intégration de la ressource dans la pratique de l'enseignant. Il y a tout d'abord la genèse documentaire du didactique qui place le travail sur les ressources au cœur du développement professionnel et la notion de schème de Vergnaud (1996) qui nous aidera à identifier les connaissances professionnelles des enseignants. La dernière partie est consacrée au raisonnement analytique, important dans le développement de la pensée algébrique. Les objectifs spécifiques de recherche sont formulés.

Le troisième chapitre présentera les grandes lignes de la méthodologie de recherche qui sera utilisée. Comme notre recherche vise à documenter un phénomène précis, notre stratégie méthodologique sera qualitative de type descriptif. Nous justifions par la suite les choix des instruments de collecte de données, les entrevues ainsi que l'observation en classe. Les techniques d'analyse des données sont également présentées en lien avec les objectifs de recherche.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation des résultats qui ont émergé suite à l'analyse des données.

Le cinquième chapitre interprète et discute ces résultats.

CHAPITRE 1: LA PROBLÉMATIQUE

1. MOUVEMENT INTERNATIONAL EN VUE DE RÉFORMER L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE

Depuis plusieurs décennies, les chercheurs et les acteurs du terrain de l'éducation font le constat que l'algèbre pose problème aux élèves, tout particulièrement lors de son introduction au premier cycle du secondaire[2] (Freiman et Lee, 2004; Kieran, 1992; Marchand et Bednarz, 1999). Ces deux dernières chercheuses rapportent d'ailleurs plusieurs recherches au niveau international qui ont mis en évidence le fait que la résolution d'équations et de problèmes et la manipulation d'expressions algébriques et de variables posent plusieurs difficultés aux élèves en algèbre. Ces constatations ont amené les chercheurs, dans les années 80, à questionner l'approche curriculaire de l'enseignement de l'algèbre.[3]

À l'image du programme scolaire de formation québécoise en vigueur au Québec avant la réforme de 1993, les programmes de plusieurs pays insistaient sur le développement d'habiletés techniques du calcul algébrique par l'introduction de son langage littéral. Ces programmes étaient basés sur la vision traditionnelle suivante de l'enseignement de l'algèbre: l'algèbre est introduite au secondaire après un long apprentissage de l'arithmétique au primaire. Cette vision a occasionné plusieurs difficultés aux élèves. Dans leur texte synthèse publié dans le *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Carraher et Schliemann (2007) font d'ailleurs état, en s'appuyant sur plusieurs recherches des années 80 et 90, des croyances et des difficultés des élèves en algèbre: les élèves ne voient pas l'égalité comme une relation d'équivalence, ils croient que le signe d'égalité représente un opérateur à sens unique où la réponse à une équation se trouve à droite de l'égalité, ils recherchent toujours une réponse unique, ils ont des difficultés avec les propriétés de commutativité de l'addition et de la multiplication et de distributivité de la multiplication sur l'addition, ils n'utilisent pas les symboles

---

[2] Élèves de 12-13 ans.

[3] La définition de l'algèbre dans le Petit Robert (2015) témoigne même que la situation est devenue un phénomène social: « Chose difficile à comprendre, domaine inaccessible à l'esprit ».

mathématiques pour représenter les relations entre les quantités et ils ne comprennent pas l'usage des lettres comme des variables. En outre, il semblerait qu'un apprentissage prolongé de l'arithmétique traditionnelle vient faire obstacle à l'apprentissage de l'algèbre (Booth, 1984). Les élèves, par exemple, lorsqu'on leur présente des problèmes de résolution d'équation, ont beaucoup plus de facilité à faire des essais et erreurs que d'opérer sur l'inconnue, c'est-à-dire ils recourent à des stratégies arithmétiques plutôt qu'algébriques (Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay et Lapointe, 2015; Bednarz, Kieran et Lee, 1996; Bednarz et Janvier, 1996). Le passage d'un mode de raisonnement arithmétique à un mode de raisonnement algébrique est loin d'être facile pour les élèves. Ce qui fait dire à Filloy et Rojano (1984) qu'il existe une coupure didactique dans la ligne d'évolution entre une pensée arithmétique et une pensée algébrique.

Aux États-Unis, un groupe de travail sur l'algèbre en 1994 du *National Council of Teachers of Mathematics*[4] (NCTM) (*In Algebra Working Group*, 1995), pour sa part, met en évidence trois grandes faiblesses lors de l'introduction de l'algèbre: d'isoler les concepts d'algèbre des autres branches des mathématiques, de mettre l'accent sur les habiletés techniques et de ne pas insister sur la compréhension du symbolisme algébrique. Ces observations au sujet des difficultés en algèbre ont donné lieu à un grand mouvement mondial visant à renouveler l'enseignement de l'algèbre et c'est ce qui a donné naissance à *Early Algebra* ou « Algèbre avant la lettre » que nous présenterons dans la section qui suit.

2. LA PERSPECTIVE *EARLY ALGEBRA*

La perspective *Early Algebra* propose de « penser autrement » l'enseignement de l'algèbre. Elle se base principalement sur les idées suivantes: au lieu d'orienter l'enseignement vers le développement des habiletés techniques des élèves, il faut l'orienter vers le développement de la pensée algébrique (Squalli, Mary et Marchand, 2011). Cet

[4] Plus grande association internationale en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques

enseignement peut se faire avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre et il est donc possible de commencer dès le primaire (Squalli, Suurtamm et Freiman, 2013).

Bien que partageant ces idées, tous les chercheurs adhérant à cette perspective n'ont pas un même point de vue concernant *Early Algebra*. En effet, Carraher et Schliemann (2007) présentent deux points de vue distincts de la part des chercheurs à propos d'*Early Algebra:* 1) la pré-algèbre et 2) l'enrichissement des contenus en arithmétique par le développement de la pensée algébrique, un point de vue qui sera présenté plus loin.

Selon le premier point de vue, *Early Algebra* serait une stratégie pour faciliter le passage de l'arithmétique du primaire vers l'algèbre du secondaire en développant la pensée algébrique. L'arithmétique et l'algèbre sont donc vues comme deux disciplines bien distinctes et *Early Algebra* serait vue comme une pré-algèbre pour préparer les élèves à la transition vers la « vraie » algèbre, l'algèbre formelle (Carraher et Schliemann, 2007). En effet, selon ces chercheurs, si le contenu arithmétique, qui fait appel à des raisonnements qui s'apparentent à ceux vus en algèbre, est bien maîtrisé, l'apprentissage de l'algèbre se fera plus facilement. Comme le dit Balacheff (2001), « *the more students are confident in their arithmetical competencies, the more they will be reluctant to accept the use of algebra on problems they recognize as pertaining to the field or arithmetic* »[5] (*In* Carraher et Schliemann, 2007, p. 673).

Par ailleurs, dans quelques curriculums à travers le monde, notamment en Hongrie (Kieran, 2007), au Japon (Sutherland, 2002) et en Russie (Schmittau et Moris, 2004), le symbolisme algébrique est enseigné dès le primaire. Ceci nous laisse croire qu'il pourrait y avoir un troisième point de vue d'*Early Algebra* qui se distingue de la pré-algèbre et de l'enrichissement des contenus arithmétiques par le développement de la pensée algébrique et qui consiste en un enseignement du contenu d'algèbre du secondaire dès le

[5] « plus les étudiants sont confiants dans leurs compétences arithmétiques, plus ils seront réticents à accepter l'utilisation de l'algèbre sur les problèmes qu'ils reconnaissent comme appartenant au champ de l'arithmétique ».

primaire. En effet, selon cette perspective, les notions d'algèbre enseignées au secondaire sont adaptées et vues dès le primaire. Ainsi, au secondaire, les élèves n'ont pas de surprise lorsque l'algèbre leur est enseignée puisqu'ils travaillent avec le symbolisme algébrique depuis le primaire. Dans une étude comparative des curriculums d'algèbre entre les pays, Sutherland (2002) présente le curriculum japonais comme un programme à part des autres puisque celui-ci insiste sur le fait de symboliser les relations mathématiques dès le primaire. Schmittau et Moris (2004), dans une étude comparative des curriculums des États-Unis et de la Russie, montrent qu'il existe de grandes différences entre les curriculums, notamment par l'enseignement des relations entre les quantités avec le symbolisme algébrique dès le primaire en Russie. Dans plusieurs de ses travaux ayant influencé le curriculum d'algèbre en Russie, Davydov (1969/1991) a montré que les élèves réussissent mieux lorsque le symbolisme est introduit plus tôt dans le parcours scolaire.

Expliquons maintenant le deuxième point de vue annoncé précédemment. Selon celui-ci, *Early Algebra* préconise le fait qu'il ne s'agit plus d'étudier l'arithmétique et l'algèbre comme deux disciplines à part et de voir un passage de l'arithmétique vers l'algèbre, mais de trouver des façons d'enrichir le contenu vu en arithmétique en développant la pensée algébrique (Cai et Knuth, 2011; Mason, 2008; Squalli, 2002; Squalli *et al.*, 2013; Carraher et Schliemann, 2007; Kaput, 1995). Il ne s'agit pas non plus d'enseigner l'algèbre aux plus jeunes avec la notation symbolique comme selon le troisième point de vue présenté plus tôt, mais bien de développer une façon de penser et de raisonner algébriquement sans nécessairement utiliser les lettres. Aussi, c'est une occasion, selon ce point de vue, d'approfondir certains concepts, comme l'égalité, l'opération, la régularité, la variable, etc. (Squalli *et al.*, 2013). Selon ce même point de vue, *Early Algebra* n'est également pas une pré-algèbre pour préparer à l'algèbre plus formelle du secondaire et n'intègre pas non plus de nouveaux contenus à enseigner. Selon Kaput (1995), la vision de l'algèbre sur laquelle se base la réforme de l'enseignement de l'algèbre viserait à construire sur la généralisation naturelle des élèves lors de situations arithmétiques pour approfondir leurs raisonnements sur les quantités et d'exploiter l'apprentissage du langage pour construire un système de notation qui leur servira plus tard. Ceci n'est possible que si les enseignants du primaire sont préparés pour saisir ces opportunités. Nous y reviendrons plus loin.

Ces mêmes chercheurs se détachent du point de vue traditionnel de l'enseignement de l'algèbre selon laquelle l'arithmétique doit être vue avant l'algèbre (Carraher et Schliemann, 2007). Aussi, il s'agit également de s'éloigner de l'enseignement de l'algèbre qui est vue comme une arithmétique généralisée. (Squalli *et al.*, 2011; Lee, 2002). En effet, comme le mentionne Kieran (1992),

> *The introductory chapter of most textbooks emphasizes links to arithmetic. Algebraic representations are treated as generalized statements of the operations carried out in arithmetic; that is, treated in procedural terms whereby numerical values are substituted into algebraic expressions to yield specific output values.*[6] (p. 392)

Selon ce point de vue, *Early Algebra* vise donc à avoir une vision plus large que cette arithmétique généralisée qui remplace pratiquement les nombres par les lettres lors de l'enseignement de l'algèbre. C'est également selon ce point de vue que nous abordons cette recherche puisque nous croyons qu'il est possible de travailler sur les structures et les relations entre les quantités pour y donner du sens et ainsi développer cette pensée algébrique à travers les problèmes vus en arithmétique au primaire[7].

Par ailleurs, *Early Algebra* est à la fois un domaine de recherche, des perspectives curriculaires et un domaine de formation des enseignants. Dans ce qui suit, nous aborderons ces trois aspects.

[6] Le chapitre d'introduction de la plupart des manuels souligne les liens avec l'arithmétique. Les représentations algébriques sont traitées comme des généralisations des opérations effectuées en arithmétique ; qui est, traité en termes de procédure par lequel les valeurs numériques sont substitués en expressions algébriques pour produire des valeurs de sortie spécifiques.

[7] Élèves de 5 à 11 ans.

2.1 *Early Algebra* comme domaine de recherche

Le domaine de recherche d'*Early Algebra* est présenté en deux parties, c'est-à-dire que nous aborderons d'abord les questions d'ordre conceptuel que cette perspective a fait émerger et nous ferons ensuite état des recherches empiriques.

2.1.1.Questions d'ordre conceptuel

Les différents points de vue présentés précédemment de la perspective *Early Algebra* découlent des questions d'ordre conceptuel qui préoccupent les chercheurs de ce domaine. Ces questionnements renvoient entre autres à ce qu'est l'algèbre, à ce qu'est la pensée algébrique et au lien entre l'arithmétique et l'algèbre.

Tout d'abord, en ce qui concerne l'algèbre, il existe une variété de visions. En effet, dans sa thèse de doctorat, Lee (1997) présente six visions différentes qui ressortent d'une recherche où il a été demandé à des enseignants, des didacticiens et des mathématiciens ce qu'était pour eux l'algèbre. Il y a l'algèbre en tant que langage, manière de penser, matière scolaire, outil, activité et arithmétique généralisée. Elle montre par ailleurs qu'il n'existe pas de consensus à ce sujet. Parmi les différentes visions de l'algèbre, plusieurs chercheurs ne font d'ailleurs pas la distinction entre l'algèbre et la pensée algébrique.

Selon Cooper, Williams et Baturo (1999), l'algèbre « is an abstract system in which components interact to reflect the structure of arithmetic »[8] (p. 1). D'autre part, l'algèbre est reconnue pour recueillir « *the means by which to describe and analyse relationships* »[9] (Usiskin, 1988, *In* Wilkie, 2014, p. 399). Pour cet auteur, elle concerne donc essentiellement les relations entre les objets et permet de les étudier en profondeur. L'algèbre, selon Kaput (1995), doit être décrite selon deux types de discours: comme un ensemble d'artefacts culturels implicitement partagés lorsque les différentes activités algébriques sont réalisées et comme une manière de penser (généralisation, abstraction,

---

[8] est un système abstrait dans lequel ses composantes interviennent pour refléter la structure arithmétique.
[9] les moyens par lesquels on décrit et analyse les relations.

justification, etc.). Il distingue également cinq aspects importants qui concernent l'essence du raisonnement algébrique (la généralisation et le formalisme algébrique), les sujets mathématiques importants (étude des structures et des systèmes abstraits de l'arithmétique comme les relations et les fonctions) et le langage utilisé (outil de modélisation). Radford (2006, 2008, 2014), quant à lui, ne définit pas précisément l'algèbre, mais relève trois grandes caractéristiques de la pensée algébrique: 1) l'indétermination, c'est-à-dire que la situation avec laquelle l'élève travaille contient des quantités dont les valeurs sont non déterminées (comme les inconnues, les variables, les paramètres, etc.), 2) la dénotation qui concerne la capacité à désigner des quantités inconnues (par des symboles, des gestes, etc.) et 3) l'analycité qui fait référence à la capacité de raisonner sur ces nombres inconnus comme s'ils étaient connus et d'opérer sur ceux-ci. Dans la plupart des textes consultés, les didacticiens ne font pas la distinction entre la pensée algébrique et le raisonnement algébrique. Ces deux expressions sont souvent utilisées comme synonyme, mais une distinction entre les deux sera présentée plus loin.

Ces différents questionnements ont amené les chercheurs à réfléchir au lien entre l'arithmétique et l'algèbre. Pour Filloy et Rojano (1984), il existe une barrière claire entre ces deux domaines, par exemple dans les équations avec des inconnues des deux côtés de l'égalité qui appartiennent exclusivement au domaine de l'algèbre. L'arithmétique et l'algèbre sont donc deux domaines distincts selon eux. Par contre, plusieurs didacticiens s'entendent pour dire que « *Both arithmetic and algebra are based on the same fundamental ideas* »[10] (Napaphun, 2012, p.100). Pour Adihou *et al*. (2015) la différence entre les deux types de raisonnements se situe au niveau du caractère analytique de ceux-ci. Un raisonnement analytique signifie de considérer l'inconnue, la représenter et opérer sur cette représentation comme si les nombres étaient connus. Nous en parlerons plus en détail dans le cadre conceptuel. Plusieurs chercheurs discutent encore de ses enjeux en tentant de définir chacun des concepts et du lien entre les deux.

[10] L'arithmétique et l'algèbre sont tous les deux basées sur les mêmes idées fondamentales.

Selon l'analyse de l'évolution historique de l'algèbre de Squalli (2000), Squalli et al. (2011) définissent l'algèbre comme l'« ensemble des activités mathématiques faisant intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois » (p.70). C'est sur cette définition que nous nous appuierons pour la présente recherche. Ainsi, dans sa conception de l'algèbre, une grande part de l'arithmétique est comprise dans l'algèbre. Il définit la pensée algébrique comme une manière de penser que l'on peut mobiliser dans les activités algébriques. Il ajoute que sur le plan opérationnel, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles; une tendance à avoir une vision structurale (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul) (Squalli, 2015). Cette proposition permet ainsi de distinguer la pensée algébrique du raisonnement algébrique. En effet, selon lui, la pensée algébrique est une tendance de l'esprit et le raisonnement algébrique est un de ses outils. Tout récemment, Radford (2015) propose une distinction pour différentes formes de pensée dans le cadre de sa théorie de l'objectivation. Dans un de ses textes récents, il distingue « la pensée subjective, la pensée du sujet pensant […] de la pensée culturelle la pensée qui transcende le sujet en tant qu'individu » (Radford, 2015). Nous n'irons pas plus loin sur le sujet puisque ce n'est pas l'objet de notre recherche.

Plusieurs chercheurs s'accordent à dire que la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique sont deux composantes essentielles et fondamentales caractéristiques de la pensée algébrique (Squalli, 2000; Kaput, Carraher et Blanton, 2008; Radford, 2014). En ce qui concerne la généralisation, elle est considérée comme une composante essentielle des mathématiques et pour développer la pensée algébrique. Mason, Gramham, Pimm et Gowar (1985) l'expriment comme ceci: « *generality is the* *lifeblood and algebra is the language in which generality is expressed* »[11] (*In* Radford, Bardini, et Sabena, 2007, p. 508). Kaput appuie l'idée en mentionnant que deux des trois aspects de l'algèbre qu'il présente concernent la généralisation: « *algebra as a study of structure and systems abstracted from computations and relations* »[12] (Kaput, 2006, *In* Warren, 2009, p. 30) et « *algebra as a study of functions, relations and joint variation* »[13] (*Idem*). Ces aspects permettent d'exprimer la généralisation à l'aide de symboles liés aux systèmes et de travailler avec les opérations possibles. Pour la tendance à raisonner de manière analytique, comme nous l'avons annoncé, nous en parlerons plus en détail dans le cadre conceptuel.

2.1.2.Recherches empiriques

L'intérêt des chercheurs a été, dans un premier temps, d'étudier la viabilité du développement de la pensée algébrique au niveau primaire dans les écoles. Comme ce n'était pas prescrit dans les programmes scolaires auparavant, un monde de possibilités s'ouvre. Il est intéressant de saisir des opportunités lors des activités dans d'autres branches des mathématiques pour travailler la pensée algébrique avec des élèves, d'une part, et, d'autre part, de voir ce qui se fait déjà par les enseignants sur le terrain et ce qui est possible d'accomplir avec des élèves de tous les âges, même au préscolaire (Boily, Lessard, Polotskia, Anwandter-Cuellar, 2015). Lee (2002) rappelle d'ailleurs qu'une multitude de recherches depuis les années 60 ont montré que les élèves étaient capables de faire de l'algèbre en mentionnant plusieurs auteurs comme Sawyer, Burkhardt, Papert, Davydov, Davis, Carraher, Kaput, Blanton, etc. Les conclusions de ces recherches amènent également que les enfants peuvent même prendre plaisir à faire de l'algèbre.

Dans l'article synthèse de Carraher et Schliemann (2007), plusieurs résultats de recherches empiriques sont relevés et amènent d'ailleurs les auteurs à présenter trois

[11] La généralité est l'élément vital et l'algèbre est le langage par lequel cette généralité est exprimée
[12] l'algèbre comme une étude de la structure et des systèmes abstraits de calcul et des relations.
[13] l'algèbre comme une étude des fonctions, des relations et des covariations.

approches didactiques avec les élèves pour favoriser le développement de la pensée algébrique: « *arithmetic and numerical reasoning* »[14], « *arithmetic and quantitative reasoning* »[15] et « *arithmetic and functions* »[16]. D'une part, pour le raisonnement arithmétique et numérique, il est mentionné que les jeunes du primaire font parfois des généralisations algébriques avant même l'introduction du symbolisme algébrique. D'autre part, il a été montré par Bodanskii (1991), pour le raisonnement quantitatif, que les élèves peuvent représenter et trouver les valeurs d'inconnues dans les équations du premier degré. Enfin, les fonctions, comme entrée pour *Early Algebra,* peuvent faire profiter les élèves en leur apprenant entre autres à comprendre les variables, à voir les opérations arithmétiques comme des fonctions, à réfléchir sur les relations, à utiliser différentes représentations d'un système, etc.

Bednarz et al. (1996) proposent, pour leur part, quatre approches pour introduire l'algèbre (appuyée par Squalli *et al.*, 2011; Kieran, 2007): la généralisation, la résolution de problème, les fonctions et la modélisation. Squalli, Theis, Ducharmes et Cotnoir (2007), pour analyser les approches didactiques d'introduction de l'algèbre de trois manuels scolaires québécois, distinguent dans leur cadre de référence quatre entrées possibles dans l'algèbre: l'introduction de l'algèbre par l'apprentissage de son langage, dans un contexte de résolution de problèmes, dans un contexte de généralisation et dans un contexte d'études de relations fonctionnelles.

En plus d'être un domaine de recherche, la perspective Early Algebra a fait naître plusieurs perspectives curriculaires qui affectent les programmes de plusieurs pays.

---

[14] L'arithmétique et le raisonnement numérique
[15] L'arithmétique et le raisonnement quantitatif
[16] L'arithmétique et les fonctions

2.2 *Early Algebra* comme perspective curriculaire

Tout d'abord, concernant les différentes perspectives de l'enseignement de l'algèbre, plusieurs pensaient que l'arithmétique devait venir d'abord et l'algèbre par la suite. Ainsi, les programmes étaient constitués de sorte que les élèves apprennent les concepts de l'arithmétique au primaire et n'abordent pas l'algèbre avant le secondaire. Par contre, comme il a été mentionné plus tôt, les élèves seraient capables de développer des raisonnements algébriques lors de résolutions de problèmes arithmétiques avant l'enseignement de l'algèbre formel (Demonty, Fagnant et Vlassis, 2015; Radford 2006, 2008, 2014). D'ailleurs, les promoteurs de la perspective *Early Algebra* mentionnent que les notions d'arithmétique dans les programmes actuels ne sont pas si différentes de l'algèbre (Carraher et Schliemann, 2007). Kaput (1995, In Carraher et Schliemann, 2007) « *argued that the waeving of algebra throughout the K-12 curriculum could lend coherence, depth, and power to school mathematics, and replace late, abrupt, isolated, and superficial high school algebra courses* »[17]. Van Dooren, Su, D'Ombrain et McFadden (2002) mentionnent que les jeunes devraient être capables, lorsqu'ils commencent à développer leur pensée algébrique, de travailler sur les relations (symboliser et généraliser) et de représenter les inconnues d'une situation.

La perspective *Early Algebra*, par ces nouvelles idées sur l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre par le développement de la pensée algébrique, n'a pas été adoptée à l'unanimité par les acteurs du domaine de l'éducation (Squalli *et al.*, 2011). Tout d'abord, certains enseignants relevaient le fait que les élèves doivent avoir une bonne base en arithmétique avant d'entreprendre l'algèbre et de jongler avec les lettres. Ainsi, ils ne conçoivent pas que l'algèbre puisse être enseignée avant le début du secondaire puisque le primaire est exclusivement réservé à l'enseignement de l'arithmétique. Par contre, comme il a été mentionné plus tôt, l'idée n'est pas d'enseigner l'algèbre avec les lettres, mais bien de développer une nouvelle façon de penser, de penser algébriquement. Ensuite, plusieurs

---

[17] a fait valoir que à travers le programme K-12 pourrait donner une cohérence, de la profondeur , et le pouvoir de mathématiques à l'école, et pourrait remplacer les cours d'algèbre en retard, brusques, isolés et superficiels.

étaient réticents à l'idée que la quantité de contenu à enseigner au primaire, déjà chargé, s'alourdisse (Squalli *et al.*, 2011). Les acteurs préconisant la perspective mentionnent pourtant que le but n'est pas d'ajouter du contenu, mais bien d'enrichir les activités vues en classe pour développer la pensée algébrique. Il s'agirait donc de saisir les opportunités qui s'offrent probablement déjà à eux dans des situations mathématiques pour les faire travailler en ce sens. Pour ce faire, les enseignants doivent évidemment être préparés.

Dans plusieurs pays, comme les États-Unis et l'Australie par exemple, *Early Algebra* a influencé les programmes pour insister sur le développement de la pensée algébrique. Le *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM), la plus grande association de professeurs des mathématiques de l'Amérique du Nord, est l'association qui a mis de l'avant cette grande perspective curriculaire du développement de la pensée algébrique en créant un groupe de travail sur l'algèbre en 1994. Ce groupe propose un cadre de référence pour l'enseignement de l'algèbre selon quatre grands thèmes en s'inspirant des travaux de Kaput: « *Functions and Relations, Structure, Modeling et Representation and Languages* »[18] (Squalli, 2000, p. 119). Plusieurs programmes ont été influencés par leurs travaux, dont ceux des États-Unis et des provinces canadiennes.

En Ontario, lors de la réforme de 2005, le gouvernement a complètement réorganisé son programme de mathématiques. Il faut d'abord préciser que l'école primaire ontarienne s'échelonne sur huit années (1ère à la 8^{e} année, c'est-à-dire le primaire québécois et le premier cycle du secondaire) et que le secondaire est une durée de quatre ans (9^{e} à la 12^{e} année). Dans le programme du primaire, il y a maintenant une section qui s'intitule « Modélisation et algèbre », une portion indépendante de la section « Numération et sens du nombre ». Selon le gouvernement de l'Ontario, la généralisation est un aspect essentiel des mathématiques du primaire par l'étude des régularités et des relations et de savoir les reconnaître. Selon eux, « cette activité exige que les élèves reconnaissent, décrivent et généralisent des régularités dans des phénomènes du monde réel et qu'ils construisent des modèles mathématiques qui leur permettent de prévoir l'évolution de ces phénomènes »

[18] Les relations et les fonctions, la structure, la modélisation et les langages et les représentations.

(Gouvernement de l'Ontario, 2005, p. 10). De la première à la troisième année, les élèves étudieront donc davantage les régularités, mais, à partir de la quatrième année, les relations seront leur sujet d'étude principal. Cette section est essentielle puisque, selon eux, elle « aide les élèves à renforcer leurs compétences en mathématiques » (*Idem*, p. 10) et les élèves « commenceront à voir que la régularité est l'essence même des mathématiques » (*Idem* p. 10). Ils mentionnent également que « l'algèbre est le langage de communication privilégié des mathématiques » et que « les élèves doivent apprendre à utiliser l'algèbre comme outil de résolution de problèmes, c'est-à-dire comme un moyen de clarifier les concepts à un niveau abstrait avant de les appliquer » (*Idem*, p. 10). Les enseignants doivent donc enseigner l'algèbre dès la première année du primaire, ce qui est complètement nouveau pour eux. Nous nous questionnons d'ailleurs sur ce qu'est pour eux la pensée algébrique, sur les moyens mis en place par le gouvernement pour aider les enseignants à faire évoluer leur pratique selon cette nouvelle perspective et, s'ils l'ont fait, comment les enseignants ont fait évoluer leur pratique.

En ce qui concerne la France, les programmes actuels ne préconisent visiblement pas le développement de la pensée algébrique avant l'enseignement de l'algèbre formel au secondaire. Comme le mentionne Larguier (2015) dans une analyse comparative entre les programmes français et québécois pour ce qui est de l'entrée en algèbre, l'apprentissage des différentes techniques de calcul et la résolution de problèmes sont davantage mis de l'avant en France, contrairement au Québec. De plus, dès son introduction, l'algèbre est « présentée comme un langage avec des objets particuliers qui doivent être distingués » (Larguier, 2015). Par contre, aucune précision n'est apportée en ce qui concerne les approches à privilégier pour développer la pensée algébrique.

Le programme de formation du Québec (2004), malgré la proximité géographique avec l'Ontario et les États-Unis, ne s'inscrit pas dans la perspective *Early Algebra*[19]. Dans les programmes québécois, l'algèbre est considérée comme un des cinq champs des mathématiques. Les derniers changements significatifs apportés au programme de

[19] Ceci est possible puisque chacune des provinces est responsable de son programme.

mathématique datent de la réforme de 1993. Ceux-ci s'inspirent des travaux de chercheurs québécois, dont ceux de Bednarz, Kieran et Janvier (Squalli *et al.*, 2011). Voulant faciliter la transition arithmétique-algèbre pour les élèves, donner un sens au symbolisme algébrique et s'éloigner de l'introduction de l'algèbre par l'enseignement du langage et du symbolisme algébrique, ces chercheuses travaillaient sur l'introduction de l'algèbre par la généralisation et la résolution de problèmes. Ainsi, dès la première année du secondaire, l'enseignant vise à « Favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre » (Gouvernement du Québec, 2004, p. 23) par la généralisation où le symbolisme n'est qu'un prétexte pour exprimer cette généralisation et par un travail sur le sens du signe d'égalité. Lors de la deuxième année du secondaire, la résolution de problèmes dans lesquels la généralisation est toujours présente est le moyen utilisé pour introduire l'algèbre plus formellement. Ces travaux ont eu par contre une portée locale et, à notre connaissance, ont seulement influencé le programme du Québec. Même si le programme québécois ne s'inscrit pas explicitement dans la perspective *Early Algebra*, le développement de la pensée algébrique n'est pas absent pour autant dans le programme du primaire. Selon les concepteurs du Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) du premier cycle du secondaire,

> Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment, la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes. (Gouvernement du Québec, 2004, p. 253)

Pour favoriser la généralisation, les élèves sont amenés à décrire les régularités numériques, que ce soit par les nombres pairs, impairs, carrés ou autres, et le travail sur les nombres carrés ou triangulaires est fait pour que les élèves développent une conception géométrique des nombres entiers et des concepts et des théorèmes en acte (Larguier, 2015). De plus, les relations d'égalité entre des expressions numériques sont abordées dès le primaire, ce qui préparerait les élèves pour l'entrée en algèbre. Les équivalences sont également demandées aux élèves dans le programme du Québec: « Déterminer des équivalences numériques à l'aide de relations entre les opérations ». Tous ces éléments pourraient amener les élèves québécois à développer une pensée algébrique avant l'enseignement de l'algèbre formel malgré que le programme n'ait pas été influencé par *Early Algebra*. Par contre, par la volonté de faciliter la transition arithmétique/algèbre et de garder l'introduction de l'enseignement de l'algèbre au secondaire, il nous semble que le programme du Québec actuel pourrait davantage se situer dans la première vision d'*Early Algebra* présentée précédemment, la pré-algèbre.

Les idées de la perspective *Early Algebra* circulent par la proximité géographique et culturelle de l'Ontario et des États-Unis et nous assistons, depuis quelques années au Québec, au développement de plusieurs initiatives locales visant le développement de la pensée algébrique. Tout d'abord, les enseignants dans les classes, sachant que le passage de l'arithmétique à l'algèbre est difficile, visent le développement de la pensée algébrique, souvent sans en avoir conscience, dans leur classe lors de situations arithmétiques propices au développement du sens des opérations. Comment pourrait-on leur faire prendre conscience des occasions qui se présentent à eux ? Comment réussir à faire adopter aux enseignants un regard algébrique (Kaput, 1995) lors de situations enseignées en arithmétique au primaire pour viser le développement de la pensée algébrique chez les élèves ? Comme les programmes de l'Ontario ont mis de l'avant le développement de la pensée algébrique dans les classes, les maisons d'édition de cette province ont par la suite créé de nouveaux manuels correspondants au nouveau programme. Ainsi, au Québec, certains de ces manuels, traduits en langue française, commencent à être utilisés dans les classes, comme les manuels *L'enseignement des mathématiques* (Van de Walle et Lovin, 2008) où l'élève est amené à travailler le sens du nombre et le raisonnement algébrique par l'étude des régularités. Par contre, malgré que ces manuels soient à la disposition des enseignants, est-ce que ces derniers les utilisent ? Si oui, comment les utilisent-ils ? Comment s'approprient-ils cette nouvelle façon d'enseigner le sens du nombre ? Du budget a également été réservé, par le programme anglophone ontarien, pour faire des recherches empiriques au Québec et en Ontario sur le sujet. Par ailleurs, une communauté de pratique, sous forme de chantier provincial, s'est développée afin d'accompagner les enseignants pour faire évoluer leurs pratiques pour viser le développement de la pensée algébrique.

Cette communauté sera décrite en détail plus loin puisqu'elle est le contexte et l'origine de notre problème de recherche.

2.3 *Early Algebra* comme domaine de formation des enseignants

Early Algebra a également influencé et enclenché des recherches à propos de la formation des enseignants pour des pratiques visant le développement de la pensée algébrique. Les enseignants font d'ailleurs partie des récentes préoccupations de recherche pour les didacticiens en mathématiques et plusieurs nouvelles questions se posent. Comme c'est une nouvelle perspective d'enseignement pour les enseignants du primaire et que ces derniers ont eux-mêmes appris dans un contexte traditionnel, ils ne se rendent alors peut-être pas compte que plusieurs occasions d'enrichissement se présentent à eux lors de situations mathématiques. De plus, pour qu'une situation change en enseignement, non seulement les programmes doivent changer, mais les enseignants doivent être formés pour intégrer ces changements dans leur pratique et ainsi changer ce qui se passe dans les classes.

Les formations initiale et continue des enseignants de mathématique à ce sujet sont donc remises en question. Nous nous demandons en effet comment former ces enseignants à avoir des pratiques visant le développement de la pensée algébrique. Deux avenues sont étudiées dans le domaine de la recherche: former les enseignants dès la formation initiale pour briser ces conceptions apprises au primaire et les former en formation continue pour intégrer cette nouvelle perspective dans la pratique des enseignants déjà en fonction. Plusieurs questions restent à être explorées quant aux différentes façons d'aider les enseignants à développer des connaissances professionnelles sur le sujet. Castro Gordillo et Godino (2014) ont montré que les enseignants en formation universitaire au Québec ne sont pas capables de reconnaître facilement les occasions de généraliser dans les situations du primaire. Tout cela est dû au fait, selon cette recherche, qu'ils ont une conception du raisonnement algébrique basée sur deux éléments. Le premier est que l'algèbre est essentiellement l'utilisation de lettres où l'élève doit faire des opérations numériques. Le deuxième est qu'il n'y a pas d'activité appropriée proposée dans les manuels concernant la recherche de règle par exemple.

Par ailleurs, mettre les ressources à la disposition des enseignants ne suffit pas pour changer leurs pratiques (Gueudet et Trouche, 2010). Si le Québec voulait intégrer le développement de la pensée algébrique dans une nouvelle réforme, la réussite de son implantation dépendrait certainement de la qualité de préparation des enseignants pour opérationnaliser cette orientation dans leurs pratiques. Ainsi, le fait de traduire des manuels de l'Ontario ou de développer des ressources visant le développement de la pensée algébrique ne veut pas dire que les enseignants l'intègreront dans leur pratique. La question du développement des connaissances professionnelles entre en ligne de compte. Comment fait-on évoluer les pratiques des enseignants ou, en ce qui nous concerne, comment accompagner les enseignants à intégrer dans leur pratique le développement de la pensée algébrique? Plusieurs moyens déjà connus peuvent être utilisés: des cours spécifiques lors de la formation des futurs enseignants, des formations ou des conférences avec les enseignants dans les écoles, le développement de nouvelles ressources et de banques de ressources accessibles, du travail directement avec les enseignants en classe ou hors classe, etc. Plusieurs initiatives des professeurs des universités québécoises ont été prises pour modifier leurs cours pour former les futurs enseignants pour viser le développement de la pensée algébrique. Allons maintenant voir une initiative québécoise pour former, en ce sens, les enseignants sur le marché du travail.

3. CONTEXTE À L'ORIGINE DU PROBLÈME

Cette recherche a été dans le contexte d'un groupe de travail formé de didacticiens et didacticiennes des mathématiques de différentes universités québécoises ainsi que des conseillers pédagogiques et enseignants de commissions scolaires du Québec avec la participation de personnel du Ministère de l'Éducation. Voici comment ce groupe présente dans son blogue le contexte de sa genèse (http://mathematiqueps.blogspot.ca/)

> Le passage de l'arithmétique vers l'algèbre chez nos élèves est un sujet qui intéresse plusieurs acteurs du milieu de l'éducation. Dans le cadre d'une rencontre sur le sujet, tenue à l'université de Sherbrooke au printemps 2013, une collaboration entre des didacticiens et des didacticiennes d'universités québécoises, le MELS (Directions des programmes pour la mathématique) et des conseillers pédagogiques permi[ren]t l'émergence d'un groupe. Ce dernier se donne comme objectif de soutenir le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le moyen choisi par le groupe est la mise en œuvre d'un dispositif de formation-action permettant à des conseillers pédagogiques ainsi qu'à des enseignants du primaire et du secondaire des commissions scolaires de la province de perfectionner leurs compétences professionnelles à intégrer dans leur pratique d'enseignement des mathématiques des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique.

Le développement de la pensée algébrique est en fait la stratégie convenue entre les conseillers pédagogiques et les didacticiens et c'est l'aboutissement de l'évolution de la problématique initiale provenant du milieu scolaire. Nos discussions avec quelques membres de ce groupe de travail nous permettent de retracer l'évolution de cette problématique ainsi que les fondements de cette stratégie. La problématique initiale intéressant le milieu scolaire a été formulée en termes de difficultés qu'éprouvent les élèves lors de la transition du primaire au secondaire, notamment lors de la transition entre l'arithmétique apprise au primaire et l'apprentissage de l'algèbre au secondaire. Les préoccupations des conseillers pédagogiques étaient de trouver des façons de faciliter cette transition.

Les discussions avec les didacticiens pour comprendre les enjeux de cette problématique ont abouti à un point de vue partagé: la problématique de la transition arithmétique/algèbre ne se réduit pas à un passage d'institutions. Au-delà des contraintes institutionnelles, c'est-à-dire que les enseignants sont généralistes au primaire et spécialistes au secondaire, que les mathématiques sont davantage représentées au primaire (avec du matériel), que le formalisme est davantage présent au secondaire et que les démonstrations sont plus formelles au secondaire, le passage se fait dans et au travers des situations riches et porteuses. Des changements conceptuels ont lieu au sein d'une même situation. Un moyen de provoquer ces changements est de développer la pensée algébrique chez les élèves. Ainsi, le groupe a choisi de privilégier l'implantation dans le milieu scolaire de pratiques d'enseignement visant le développement de la pensée algébrique dès le primaire. En outre, pour faire évoluer la pratique des enseignants, il ne s'agit pas de prendre les connaissances des chercheurs et de les appliquer en pratique. Un travail d'appropriation et d'intégration de leur part est nécessaire. Les fondements épistémologiques de notre recherche vont aussi dans ce sens. Les chercheurs ne prescrivent pas la pratique. Leur rôle est d'accompagner, d'aider l'enseignant à penser son enseignement. Pour ce faire, les didacticiens amènent les enseignants à explorer et à expérimenter des situations porteuses et relèvent les aspects intéressants de la situation en montrant l'analyse de certains concepts. Ils partagent également certains principes didactiques qui favorisent le développement de la pensée algébrique. Il s'agit donc d'outiller l'enseignant sur le plan conceptuel. Ces outils didactiques leur serviront dans la pratique et dans leur réflexion sur leur pratique.

Au départ, par peur de heurter les traditions ancrées sur le terrain, les didacticiens parlaient du « sens des opérations » plutôt que de la « pensée algébrique » lorsqu'il est question de l'enseignement au primaire. Après deux années de collaboration, certains enseignants et conseillers pédagogiques n'hésitent plus à parler de développement de la pensée algébrique.

Le groupe de travail vise principalement à développer des connaissances professionnelles chez les enseignants en lien avec le développement de la pensée algébrique et faire émerger une communauté de pratique (Wenger, 1998). Les conseillers pédagogiques font l'intermédiaire entre les chercheurs et les enseignants et jouent un rôle tampon. Ils recrutent et sensibilisent les enseignants à propos de la problématique sur le développement de la pensée algébrique. Leur but est de les amener à réfléchir sur leurs pratiques en expérimentant des situations, les accompagner dans l'expérimentation et de partager leurs connaissances développées avec la communauté. Les ressources développées ainsi que les connaissances autour de ces ressources sont mises dans le blogue du groupe pour favoriser leur mutualisation. Le but ultime serait que, de manière autonome, les conseillers pédagogiques accompagnent et forment les enseignants. De plus, la communauté leur donne l'occasion de se former à former des enseignants. Ce sont eux qui sont responsables de la plate-forme numérique où les ressources sont disponibles.

Les enseignants, quant à eux, s'impliquent dans la communauté de pratique pour découvrir de nouvelles situations, enrichir celles qu'ils utilisent et en développer de nouvelles. Par la suite, les connaissances développées sur ces ressources sont partagées avec la communauté et les enseignants ont donc l'occasion d'améliorer leurs pratiques suite aux rencontres avec les didacticiens et les conseillers pédagogiques. En participant à la communauté, ils acceptent d'expérimenter des situations innovatrices dans leur classe et de faire un retour sur ces expérimentations.

Les didacticiens de mathématique participent à la communauté en tant que formateurs universitaires. Ceux-ci assument le rôle de guide, de facilitateur et de conseiller lors des discussions à propos des différentes situations visant le développement de la pensée algébrique. Ils aident à comprendre le potentiel didactique de celles-ci. De plus, ils participent à la mise en valeur et l'explicitation des connaissances-en-acte développées par les enseignants qui n'en sont souvent pas conscients et s'en servent pour enrichir les discussions. Les rencontres de formation pour les enseignants et les conseillers pédagogiques sont également animées par les didacticiens. De plus, ces derniers sont disponibles pour répondre aux interrogations d'ordre conceptuel ou didactique.

Voyons maintenant comment tous ces éléments abordés dans la problématique sont à l'origine de notre problème de recherche.

4. PROBLÈME DE RECHERCHE

Early Algebra est une perspective qui prend beaucoup d'expansion. En effet, plusieurs questions d'ordre épistémologique sont étudiées par les chercheurs, comme définir ce qu'est l'algèbre, ce qu'est la pensée algébrique et quelle est la relation entre l'arithmétique et l'algèbre. Des recherches empiriques sont également réalisées pour étudier les possibilités et les contraintes de cette nouvelle perspective de l'enseignement de l'algèbre. Les curriculums sont aussi affectés et plusieurs ont d'ailleurs déjà été complètement repensés et réorganisés pour enrichir les situations arithmétiques et les orienter vers le développement de la pensée algébrique.

Si les curriculums se transforment, les enseignants doivent également être formés pour faire évoluer leurs pratiques selon la nouvelle perspective. Dans les pays où *Early Algebra* a influencé les programmes, des recherches ont montré que les enseignants du primaire ne sont pas bien préparés et que, malgré que des ressources soient mises à leur disposition, leurs pratiques persistent à conserver la même perspective d'enseignement des anciens programmes (Chick et Harris, 2007). Au Québec, même si le programme d'enseignement de l'algèbre ne s'inscrit pas dans la perspective *Early Algebra*, les idées de cette perspective circulent et sont parvenues aux oreilles des acteurs de l'éducation. Afin de préparer les enseignants, des conseillers pédagogiques et des didacticiens travaillent de concert pour accompagner quelques enseignants à développer des connaissances professionnelles pour viser le développement de la pensée algébrique dans leur classe en travaillant sur des ressources.

Nous nous questionnons d'ailleurs sur ce qui se passe lorsque les enseignants s'approprient ces ressources et comment ces connaissances sont développées et partagées dans un collectif d'enseignants.

Notre problème de recherche nous amène donc vers notre objectif de recherche:

- Documenter les transformations que subit une ressource en lien avec le développement de la pensée algébrique utilisée par un groupe d'enseignants.

CHAPITRE 2: CADRE DE RÉFÉRENCE

La prochaine section permet de clarifier les concepts que nous avons abordés dans la problématique. Ce cadre nous permettra d'établir les assises conceptuelles de la recherche et une référence théorique pour l'élaboration des outils de collecte de données et des méthodes d'analyse. La genèse documentaire du didactique de Gueudet et Trouche est la principale assise conceptuelle de notre recherche. Elle fait d'ailleurs référence à la notion de schème de Vergnaud qui nous servira à préciser les objectifs spécifiques. Des éclaircissements sur des concepts de la pensée algébrique en contexte de résolution de problèmes seront également apportés.

1. GENÈSE DOCUMENTAIRE DU DIDACTIQUE

Le cadre de la genèse documentaire du didactique développé par Gueudet et Trouche vise à étudier les pratiques d'enseignement par l'intermédiaire des ressources utilisées par les enseignants: « Les auteurs invitent au changement de point de vue: au lieu de se centrer sur le professeur en classe, il s'agit de regarder l'activité des professeurs dans son unité et sa dynamique » (Gueudet et Trouche, 2010, p. 14). Pour ce faire, ces deux auteurs se sont inspirés du cadre de l'approche instrumentale de Rabardel (1995, 1999a, 1999b). Il apparait donc important de présenter d'abord ce cadre qui est à l'origine de la genèse documentaire.

1.1 Approche instrumentale de Rabardel

Appartenant au départ à l'ergonomie cognitive, l'approche instrumentale a plus tard été adaptée à la didactique des mathématiques. Son objectif est l'étude de l'activité cognitive à travers le processus de création d'un instrument par le sujet. L'instrument est vu, dans une perspective vygotskienne, comme un médiateur entre le sujet et l'objet. Tout d'abord, la distinction est faite entre un artefact et un instrument. L'artefact est un produit de l’activité humaine étant disponible pour un sujet, mais qui n’a pas encore été approprié par celui-ci. Le terme artefact est utilisé plutôt qu’objet, puisqu’il n’est pas nécessairement matériel; il peut être un individu, un logiciel ou même un concept.

L’instrument est, quant à lui, construit par l’utilisateur dans son action située (Rabardel, 1999b). Il est en effet le produit d’une genèse instrumentale, c’est-à-dire le processus d’appropriation de l’artefact, de la part du sujet et son intégration dans l'activité de ce dernier. Il comprend deux composantes: l’artefact et des schèmes d’utilisation. Ainsi, malgré que l’artefact soit « considéré comme moyen d’action » (Rabardel, 1999a, p. 8) par le sujet, il n’est pas considéré en totalité comme l’instrument pour le sujet. Les schèmes d’utilisation sont les structures que le sujet élabore pour organiser son action: « ensemble structuré des caractères généralisables des activités d’utilisation des instruments » (Rabardel, 1999a, p. 63). Ainsi, les activités conduisant à la réalisation des fonctions de l’instrument peuvent être engendrées par le sujet (Rabardel, 1999a). Ces schèmes sont composés d’invariants opératoires correspondants à une certaine classe de situations. Grâce au pouvoir assimilateur des schèmes, le sujet peut donc répéter l’action, même si les objets sont différents d’une situation à une autre. Ils sont propres à chacun, il faut donc les considérer dans leur dimension individuelle, mais également dans la dimension collective. En effet, ils résultent d’un processus collectif dont les concepteurs et les usagers font partie. L’artefact et les schèmes ont une relation d’indépendance relative, c’est-à-dire qu’un schème, par exemple, pourrait être valide pour différents artefacts. Il faut également préciser que l’instrument n’existe pas seul. Il n’existe en effet que par le sujet et il fait partie d’un système d’instruments qui s’influencent entre eux. Rabardel (1999b) le définit comme « l’ensemble organisé des moyens disponibles pour l’activité du sujet en fonction des tâches et des contextes » (p. 212).

Lors de la genèse instrumentale, processus par lequel le sujet s’approprie et transforme l’artefact, Rabardel identifie deux processus qui lient l’artefact au sujet: l’instrumentation et l’instrumentalisation. D’une part, lors de l’instrumentation, il y a émergence et évolution des schèmes d’utilisation (Rabardel, 1999a). C’est le processus par lequel l’artefact influence la pratique et soutient l’activité du sujet. Le regard est donc tourné vers l'évolution du sujet. D'autre part, lors de l'instrumentalisation, il y a apparition et transformation de la portion artefact de l'instrument. Le regard est alors tourné vers l'artefact qui se modifie selon le rôle qu'il joue dans l'action.

Rabardel (1999a) identifie deux facteurs pouvant influencer l'activité cognitive par le travail sur les instruments. Tout d'abord, le sujet doit gérer l'instrument qui est lié à un ensemble de contraintes. Celles-ci obligent donc le sujet à structurer à l'avance son action pour une bonne utilisation de l'instrument. Ensuite, malgré qu'il soit porteur de contraintes, l'instrument amène également un monde de possibilités: « de nouveaux changements d'état des objets sont accessibles » (Rabardel, 1999a, p. 6).

L'approche instrumentale développée par Rabardel constitue le point de départ central pour l'approche documentaire. Plusieurs concepts ont été repris, mais renommés, pour les transposer dans l'activité des enseignants. La prochaine partie développe davantage les concepts de l'approche documentaire.

1.2 Approche documentaire du didactique de Gueudet et Trouche

L'approche documentaire propose d'étudier le travail de l'enseignant sous trois angles: l'ensemble des ressources d'un enseignant, l'enseignant lui-même et les processus collectifs. Les auteurs ont voulu tenir compte de la multitude de ressources que l'activité de l'enseignant comprend. Ainsi, pour étudier le travail de l'enseignant, l'approche documentaire du didactique centre sur le travail de l'enseignant autour des ressources. Ce travail est, pour eux, au cœur du développement professionnel. Le travail en classe n'est ainsi qu'un aspect du travail de l'enseignant. C'est pourquoi Gueudet et Trouche ont intégré dans leur analyse le travail hors classe, qui est en forte relation avec le travail en classe.

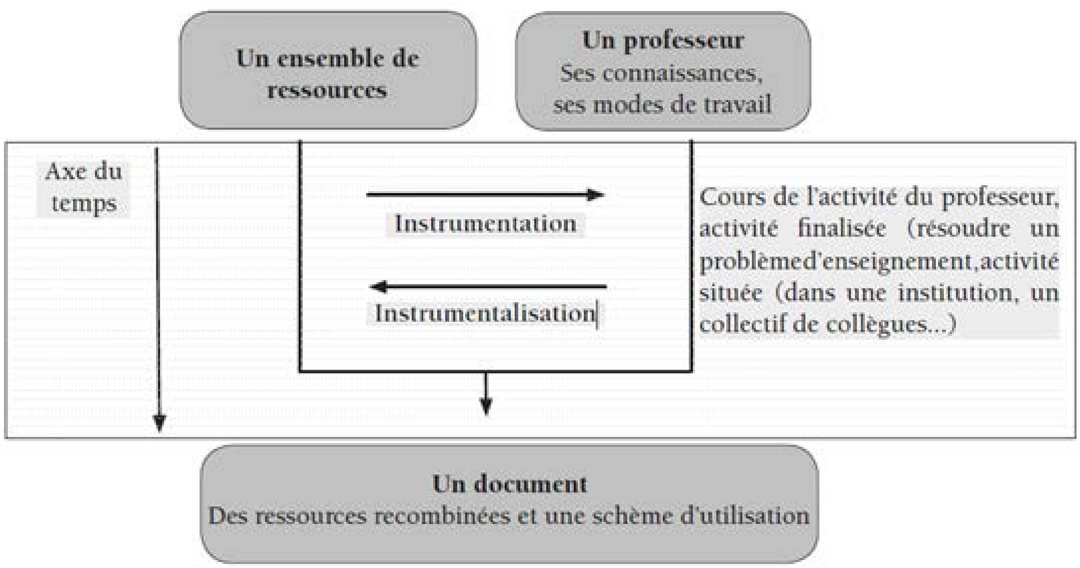
Comme Rabardel fait la distinction entre artefact et instrument, Gueudet et Trouche font la distinction entre ressource et document. Ainsi, la ressource est à l'artefact ce que le document est à l'instrument. En parlant de ressources en éducation, les chercheurs font souvent référence à tout ce qui est matériel. Adler (2010) en apporte une définition plus large, mais plus complète à notre avis. Il présente la ressource comme un objet qui vient re-sourcer le travail de l'enseignant. Il ajoute donc à celle-ci une dimension dynamique en pensant la ressource comme le verbe. Elle vient nourrir à nouveau le travail de l'enseignant dans son action. En outre, la ressource n'est pas nécessairement matérielle, mais elle peut être abstraite, d'origine sociale et/ou culturelle. Dans la même optique qu'Adler, Gueudet et Trouche reprennent la définition de Rabardel à propos de l'artefact pour définir la ressource: « un produit de l'activité humaine, élaboré pour s'inscrire dans une activité finalisée » (Rabardel, 1995, *In* Gueudet et Trouche, 2010, p. 58). L'intégration d'une ressource dans la pratique de l'enseignant ne va pas de soi; elle exige la construction de schèmes d'usage, que nous définirons plus loin.

En les associant à l'instrument chez Rabardel, Gueudet et Trouche (2008) considèrent les documents comme des « entités hybrides, composées de ressources réorganisées et de schèmes d'utilisation structurés par des *invariants opératoires* » (p. 22). Ils sont également « porteur[s] d'une intention spécifique à un contexte d'usage » (Crozat, 2007, *In* Gueudet et Trouche, 2009, p. 3). Nous pouvons écrire l'équation suivante, un peu simpliste, certes, mais efficace, pour représenter la situation : document = ressource + schèmes d'utilisation. Le document est le résultat du travail documentaire de l'enseignant, dont le moteur est la genèse documentaire, le processus par lequel l'enseignant transforme la ressource en document.

Il semble également important de préciser que le document créé à partir d'une ressource n'est pas la seule voie possible. En effet, la ressource peut aboutir à plusieurs documents si le ou les enseignants font appel à des schèmes d'utilisation différents.

Durant le processus de la genèse documentaire, les schèmes d'utilisation se développent et s'associent à la ressource. Un schème, au sens de Vergnaud, « est une organisation invariante de l'activité, qui comporte notamment des règles d'action, et est structurée par des *invariants opératoires* qui se forgent au cours de cette activité » (Vergnaud, 1996, *In* Gueudet et Trouche, 2008, p. 3). Ces invariants opératoires sont ici les connaissances professionnelles des enseignants. Lorsque ceux-ci font face à de nouvelles ressources, ils puisent dans leur répertoire d'invariants et les transforment pour s'adapter et se modifier pour ainsi en créer de nouveaux. Nous détaillerons ce concept un peu plus loin.

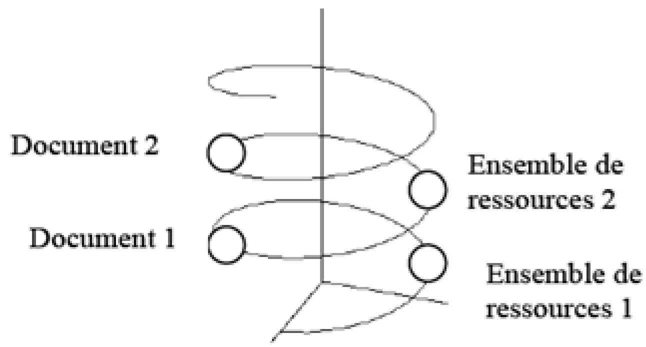
Dans la figure suivante, Gueudet et Trouche présentent le schéma de la genèse d'un document à travers le temps. On voit que le double processus d'influence entre les ressources et le professeur (ou l'enseignant) est repris de l'approche instrumentale, l'instrumentation et l'instrumentalisation. Ainsi, au cours de l'activité de l'enseignant (lors de l'intégration de la ressource dans la pratique), la ressource influence et soutient le travail de l'enseignant et ce dernier transforme également la ressource. Le sujet met à sa main les artefacts et les connaissances professionnelles évoluent par ce travail (Gueudet et Trouche, 2008). Cette genèse documentaire se déroule à travers le temps pour donner naissance à un document.



Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs communautés. Le cas des mathématiques. *Education & Didactique*, 2(3), 1-28.

Figure 1: Représentation schématique de la genèse d'un document

Le document, tout comme l'instrument, n'est pas seul. Il fait partie d'un ensemble de documents qui évoluent dans le temps, c'est ce que Gueudet et Trouche (2008) appellent le système documentaire de l'enseignant. Sa structure est également à mettre en relation avec la structure de l'activité du sujet. Ainsi, l'enseignant se nourrit de ressources pour créer un document, mais ce travail n'est pas fermé. Il est en constante évolution par l'arrivée de nouvelles ressources et du travail sur celles-ci. Ainsi, un document peut servir de ressource pour la construction d'un nouveau document, comme le schématisent Gueudet et Trouche (2009, p.5) par la figure suivante:



Gueudet, G. et Trouche, L. (2009) Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques?. I. Bloch et F. Conne. (dir.) *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 109-133). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Figure 2: Dialectique ressources/document et évolution temporelle

Chaque enseignant possède un système de ressources qu'il utilise dans des familles d'activité. Gueudet et Trouche (2009) nous décrivent ces familles:

> Les situations d'activité sont tout d'abord organisées en *classes de situations:* situations voisines en termes de tâches à accomplir et de conditions à prendre en compte, qui vont engendrer des modalités d'action voisines. Les classes de situations sont ensuite regroupées en *familles d'activité:* ensembles de classes de situations qui correspondent à un même type de finalité générale de l'action. Les classes de situations et les familles d'activité sont des dimensions générales qui structurent le domaine d'activité, que nous nommons ici système d'activité pour suggérer cette structure. (p.15)

Ainsi, les ressources sont associées à des familles d'activité par leur finalité parce qu'elles visent plus ou moins à atteindre le même but en lien avec un aspect particulier du travail de l'enseignant. Les ressources évoluent au fil de la genèse documentaire, mais aussi au fil des usages dans différents contextes. Guin et Trouche (2008) parlent de « ressources vivantes », puisque celles-ci sont transformées pour et par les enseignants. Ils utilisent également le terme « vivier » qui fait référence au caractère évolutif des ressources mutualisées par un collectif d'usagers.

Le cadre de la genèse documentaire explore la dimension collective dans l'étude du travail de l'enseignant autour d'une ressource puisque, non seulement les documents ne sont pas seuls, mais les enseignants ne travaillent pas seuls également. En effet, son environnement influence son activité (Ruthven, 2010). Ils font souvent partie, en travaillant de pair avec leurs collègues, d'une communauté d'enseignants qui partage les mêmes idées. Elle peut se former dans un même niveau d'enseignement, dans une même école, dans une même commission scolaire ou même sur une plate-forme numérique où il est possible de partager des ressources. Ces enseignants de la communauté développent un vivier de ressources empreintes des différents usages: « Le vivier de ressources engendre un système documentaire communautaire qui affecte la pratique, et donc la communauté, dans un processus d'instrumentation » (Gueudet et Trouche, 2009, p. 18). Wenger donnera le nom de communauté de pratique aux « regroupements naturels, souvent professionnels […] mais correspondent toujours à un engagement partagé de tous leurs membres, qui collaborent à un projet commun » (Wenger, 1998, *In* Gueudet et Trouche, 2008, p. 19). Les membres de cette communauté produisent des ressources qui utilisent un langage et des éléments partagés par ceux-ci.

Leur attention se porte particulièrement sur le lien entre l'aspect collectif et l'aspect individuel. Selon eux, la ressource contient non seulement les schèmes des concepteurs, mais elle est associée à des schèmes d'utilisation lorsqu'un enseignant se l'approprie. Elle se transforme donc au fil des usages qui en sont faits grâce aux nouveaux schèmes d'utilisation qui s'ajoutent ou se modifient. C'est ce qu'ils appellent la mutualisation des ressources, d'où l'intérêt de regarder le travail sur une ressource au travers d'un collectif d'enseignants. Le travail de ce collectif se résume au partage de ressources, à la création de nouveaux documents et d'un répertoire de nouvelles connaissances. Il est à se demander par contre comment les connaissances professionnelles des enseignants circulent parmi ces collectifs. Dans notre projet, nous ne nous centrerons pas seulement sur les schèmes individuels, mais également sur les schèmes collectifs lorsque ceux-ci travaillent sur une même ressource.

Il existe donc des liens entre la documentation individuelle et communautaire lorsqu'un individu fait partie d'une communauté (Gueudet et Trouche, 2010). En effet, l'enseignant dispose maintenant d'un ensemble de ressources existant parmi la communauté. Les ressources de l'enseignant évoluent lorsqu'ils les partagent avec les autres membres et de nouveaux éléments y sont ajoutés. Il y a aussi des discussions autour des classes de situations, par exemple les situations favorisant l'introduction d'une nouvelle notion aux élèves. Finalement, les invariants opératoires sont parfois influencés par le travail documentaire communautaire et la communauté participe ainsi à la production des documents.

Le cadre de la genèse documentaire du didactique de Gueudet et Trouche va dans le même sens que les orientations du groupe de travail sur le développement de la pensée algébrique. Selon eux, pour que la ressource devienne document, un travail d'appropriation de la part des enseignants est nécessaire. En effet, avec la médiation des didacticiens les enseignants intègrent les schèmes d'utilisation créés par les concepteurs et en créent de nouveaux pour leur pratique. En ce sens, la pratique de l'enseignant évolue, mais la ressource également. Comme le mentionne Artigue (2010, *In* Gueudet et Trouche, 2010), « une ressource est un objet vivant, transformé au fil des usages qui en sont faits, personnels ou collectifs, et à prendre conscience de la diversité possible de ces transformations suivant l'enseignant, le collectif, suivant le contexte » (p. 10). Ce groupe de travail développé au Québec visant le développement de la pensée algébrique place le travail sur les ressources au cœur de son travail. Les didacticiens tentent de dégager les schèmes d'utilisation initiaux créés par les auteurs lors de rencontres avec le groupe. Aussi, ces enseignants s'approprient par la suite ces ressources et partagent les nouveaux schèmes créés lors de leur travail. L'approche documentaire du didactique est, en somme, un « changement de point de vue, qui invite à voir le travail documentaire au centre de l'activité des professeurs et les genèses documentaires comme moteur des genèses professionnelles » (Gueudet et Trouche, 2010, p. 71).

2. NOTION DE SCHÈME

La notion de schème chez Vergnaud (1996) est tirée de sa théorie des champs conceptuels développée d'abord pour théoriser l'apprentissage des mathématiques et, plus tard, utilisée en didactique professionnelle pour étudier un sujet en situation de travail. La théorie est centrée sur le processus d'élaboration des connaissances par le sujet dans son action. Le regard est donc porté sur l'activité du sujet et l'organisation de celle-ci. Pour Vergnaud, au fond de l'action, il y a la conceptualisation. Les actions sont les indicateurs de ce qui se passe dans la tête du sujet. Il devient nécessaire de regarder l'action pour comprendre son activité, tout cela dans le but d'expliquer les logiques d'action. Les schèmes sont les indicateurs de l'organisation de l'activité qui sont classés par type de situations. Ils permettent donc de comprendre les raisons derrière les actions.

Un schème, comme nous l'avons annoncé précédemment, est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données » (Vergnaud, 1996, p. 199). Malgré qu'ils organisent l'activité de manière invariante, les schèmes peuvent prendre différentes formes. L'automatisation est un bon indice du caractère invariant. Le sujet agira d'une façon automatisée lorsqu'il fera face à une classe de situations connues. Par contre, s'il fait face à des situations dont le sujet n'a pas les compétences nécessaires, il devra se poser une série de questions pour adapter les schèmes qu'il possède déjà.

Un schème comporte des règles d'action et est structuré par des invariants opératoires (Vergnaud, 1996). Ces derniers permettent d'expliquer l'action puisqu'ils sont les instruments de la pensée que le sujet construit (Pastré, Mayen, Vergnaud, 2006). Ils contiennent les connaissances des enseignants qui classent les situations par champs conceptuels. Ces invariants opératoires peuvent être de deux types: théorèmes-en-acte et concepts-en-acte. Les premiers sont des propositions et peuvent être vrais ou faux (Vergnaud, 1996). Par contre, pour déterminer s'ils sont vrais ou faux, cela ne relève pas d'une démonstration formelle, mais cela repose sur les connaissances du sujet et si celui-ci le tient pour vrai ou faux. Les concepts-en-acte, quant à eux, sont des fonctions propositionnelles qui ne sont pas susceptibles d'être vraies ou fausses, mais elles sont indispensables à la construction des propositions. Selon Vergnaud (1996), le concept de schème permet d'identifier quatre dimensions de l'activité du sujet: les règles d'action, le but de l'activité, les invariants opératoires et la prise d'information à traiter.

La notion de schème selon Vergnaud est retenue dans le cadre de la genèse documentaire de Gueudet et Trouche (2008). Selon eux, les connaissances professionnelles des enseignants peuvent être reconnues à travers les schèmes. Celles-ci peuvent être de plusieurs types comme des connaissances mathématiques, didactiques, de gestion de classe, etc. Comme nous l'avons vu plus tôt, un schème se forge lors de l'activité et organise celle-ci. C'est un processus qui prend du temps. Le schème peut être identifié sous forme d'une régularité reproductible (Pastré, Mayen, Vergnaud, 2006). Ces aspects de la notion de schème font naître quelques réticences à l'utiliser, dans toute sa complexité, pour identifier les connaissances professionnelles des enseignants dans le cadre de notre projet. En effet, les sujets de notre échantillon se sont familiarisés avec une nouvelle ressource et ont essayé de l'intégrer dans leur pratique en la transformant en un document propre à chacun. Par contre, il est possible que la portion schème du document soit toujours en construction lors de la collecte de données et que nous ne soyons pas capables d'identifier tous les aspects du schème. Ainsi, nous identifierons les aspects du schème identifiables à ce moment et nous ferons des hypothèses de schème potentiel s'il nous est possible de le faire. Pour ce faire, nous énoncerons les règles d'action, les buts de ces règles et les théorèmes-en-actes. Ces éléments se présenteront sous la forme suivante:

Règles d'action: Série d'actions stables et reproductibles qui organise l'activité. Ces règles seront formulées à l'aide de verbe d'action et seront des actes que les enseignants ont faits en lien avec la ressource. Dans notre cas, il est possible que nous remarquions en fait ces actions une seule fois et, dans ce cas, nous énoncerons des règles d'action de schèmes en construction.

But de ces actions: Raisons derrière les règles d'action.

Théorèmes-en-acte: Propositions tenues pour vraies par les enseignants.

En ce qui concerne les schèmes communautaires, malgré qu'on tienne compte de cette dimension communautaire dans le cadre de Gueudet et Trouche, on ne les définit pas. Pour nous, ce schème communautaire se présentera sous la forme de schèmes individuels, mais il sera partagé par les enseignants du groupe, c'est-à-dire qu'ils auront chacun développé ce schème lors de la transformation de la ressource en document.

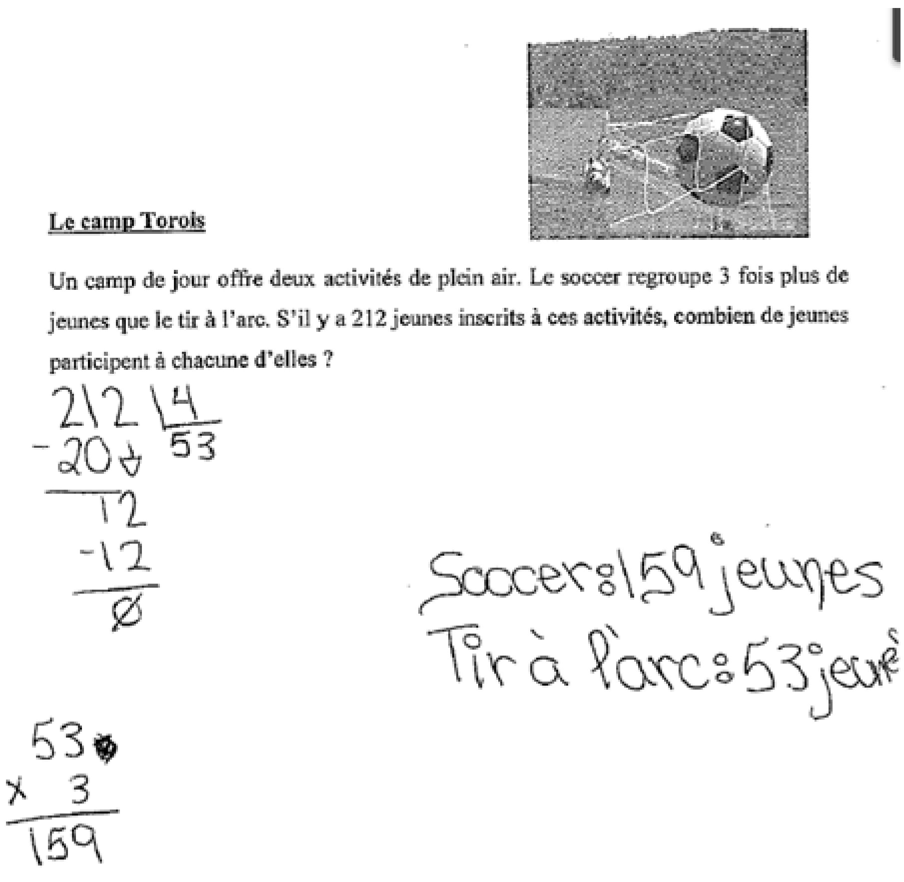
3. RESSOURCE PROPOSÉE

Cette nouvelle ressource qui a été choisie dans le cadre de notre projet est nommée Arsène Ponton. Elle vise le développement de la pensée algébrique dans un contexte de résolution de problèmes écrits. À travers ces résolutions, le raisonnement analytique est un raisonnement qui est visé. C'est pourquoi nous commencerons par définir ce qu'est un raisonnement analytique pour ensuite montrer comment il pourrait se déployer à travers la ressource Arsène Ponton (Annexe A) en faisant son analyse a priori.

3.1 Raisonnement analytique et problèmes de partage inéquitable

Par tendance à raisonner de manière analytique, Squalli *et al.* (2013) entendent à considérer l'inconnue, la représenter, opérer sur celle-ci comme on opère sur les données connues. Une idée répandue chez les chercheurs de ce domaine est qu'un raisonnement est algébrique non pas par la présence des lettres dans la résolution d'un problème, mais bien par le caractère analytique du raisonnement (Adihou *et al.,* 2015). Lins (1992), dans son travail de thèse, relève aussi la place centrale de la pensée analytique dans la pensée algébrique. On peut le remarquer également à travers l'histoire où Viète, pour signifier l'importance du caractère analytique de l'algèbre, proposait de l'appeler « analyse » et non « algèbre ».

Pour Adihou *et al*. (2015), dans une analyse de différentes résolutions de problème, la différence entre les deux types de raisonnements se situe au niveau du caractère analytique de ceux-ci. En effet, comme on peut le voir dans le problème de la Figure 3 ci-dessous créé par les auteurs, l'élève résout un problème déconnecté[20] d'une manière purement numérique, mais sa démarche laisse paraître les germes d'un raisonnement analytique. L'élève fait « comme si » l'inconnue est identifiée pour opérer sur elle.


Le camp Torois

Un camp de jour offre deux activités de plein air. Le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 212 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?

212 | 4
-208 | 53
12
-12
∅

Soccer : 159 jeunes
Tir à l'arc : 53 jeunes

53
× 3
159

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de com paraison. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3.* Algérie.

[20] Un problème déconnecté est un problème dans lequel « aucun pont ne peut être établi a priori entre les données du problème » (Bednarz et Janvier, 1996, p. 9)

Figure 3: Exemple d'une résolution d'élève par un raisonnement analytique

Lorsque l'élève divise le total par quatre et vient multiplier par trois, les auteurs croient que le raisonnement serait que « si le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc, alors le total de jeunes est 4 fois le nombre des jeunes qui font le tir à l'arc; ce nombre est donc égal à 212: 4 » (Adihou *et al.*, 2015). Dans ce cas, Adihou *et al.* (2015) disent que l'inconnue est « muette », c'est-à-dire qu'elle est considérée sans être représentée. Toutefois, même si le langage formel n'est pas utilisé, l'élève met en évidence un raisonnement à caractère analytique puisqu'il considère l'inconnue et opère sur elle. Le raisonnement analytique ne suppose donc pas l'utilisation de lettres dans la résolution de l'activité algébrique.

Suite à des recherches de grande envergure qui présentaient différents types de problèmes aux élèves, Bednarz et Janvier (1996) ont développé une typologie de problèmes et ont classé ceux-ci selon leur degré de complexité. Celles-ci ont repris les problèmes généralement rencontrés pour faire une entrée en algèbre et ont identifié trois types: les problèmes de partage inéquitable, les problèmes de transformation et les problèmes impliquant un taux. Nous nous intéressons ici seulement aux problèmes de type partage inéquitable puisque la ressource Arsène Ponton est de ce type. Dans les résultats de recherche de Bednarz et Janvier (1996), on y retrouve notamment les éléments qui sont susceptibles de déterminer le degré de complexité des problèmes (Marchand et Bednarz, 1999). Il y a tout d'abord le nombre de relations de comparaisons. En effet, plus il y a de grandeurs (valeurs inconnues) en jeu qui sont comparées entre elles, plus la difficulté augmente. Aussi, la nature des relations semble également influencer le niveau de complexité (additive, multiplicative, etc.). L'enchainement des relations serait un autre élément à considérer. Par exemple, ce ne serait pas le même degré de complexité si les relations partaient toutes du même générateur (problème de type source) ou s'il y avait une grandeur intermédiaire (problème de type composition). Il y a également les problèmes de type puits où une grandeur est générée suite à des relations entre deux autres grandeurs.

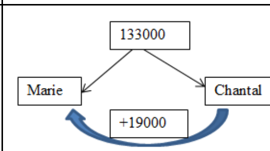
3.2 Présentation et analyse a priori de la tâche Arsène Ponton

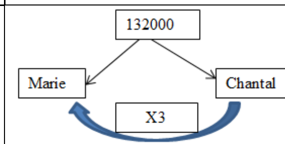
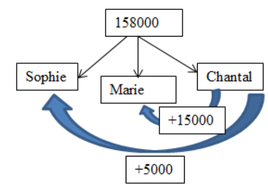
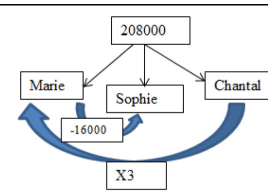
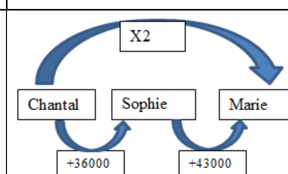
Pour étudier la genèse documentaire d'un groupe d'enseignants, nous avons retenu une seule ressource, nommée Arsène Ponton. Cette ressource fait partie du vivier de ressources appartenant au groupe de travail. Elle a donc le potentiel nécessaire pour les enseignants à viser le développement de la pensée algébrique chez les élèves. D'après notre propre expérience de formation, Arsène Ponton est une tâche qui est habituellement utilisée comme dispositif de formation des enseignants en formation initiale dans un cours de didactique de l'algèbre dans une université québécoise afin de montrer les différents raisonnements possibles dans les problèmes de partage inéquitable. Ce sont cinq problèmes de partage inéquitable. Les cinq problèmes sont de différents types et de degré de complexité croissant selon la typologie de Bednarz et Janvier (1996). La tâche demandée est de trouver à partir de quelle étape l'algèbre est nécessaire pour résoudre le problème. Dans chacun des problèmes, Arsène Ponton veut léguer sa fortune à ses nièces et il nous donne des indices quant au montant qu'il donne à chacune. Il faut donc trouver le montant donné à chacune des nièces dans les cinq problèmes. Les problèmes sont tous déconnectés, c'est-à-dire que les montants légués à chacune des nièces ne sont jamais donnés, donc il n'est pas possible de trouver la réponse directement à partir d'un montant connu.

Le tableau suivant résume les principales caractéristiques de ces problèmes ainsi que la schématisation de leur structure.

Tableau 1

Caractéristiques des problèmes de la tâche Arsène Ponton

Problèmes	**Nombre de branches**	**Nature des relations**	**Schéma**
<u>Problème 1</u> Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000$ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000$,	2	Relation additive.	

combien recevront Marie et Chantal ?			
<u>Problème 2</u> Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 132 000$, combien recevront Marie et Chantal?	2	Relation multiplicative	
<u>Problème 3</u> Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000$ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?	3	Les deux relations sont additives. Le problème est de type **Source:** une seule inconnue permet de générer les deux autres inconnues.	
<u>Problème 4</u> Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?	3	Une relation est additive et l'autre est multiplicative. Le problème est de type **Composition de relations:** une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
<u>Problème 5</u> Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal et finalement 43 000$ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?	3	La relation donnant le total des trois inconnues n'est pas donnée. Elle est remplacée par une troisième relation entre deux inconnues. Deux relations sont additives et une relation est multiplicative. Problème de type **Composition de relations.**	

Les schémas des problèmes montrent que tous ces problèmes sont déconnectés, car il n'est pas possible de trouver les valeurs des inconnues en n'opérant que sur des données et relations connues (à moins de raisonner par essais-erreurs). Pour illustrer les différents types de raisonnement que l'on peut utiliser dans la résolution de ces problèmes, nous allons étudier le cas du problème 1. Nous nous appuyons sur la grille développée par Squalli *et al.*(soumis) qui propose une analyse des démarches de résolution selon le caractère analytique du raisonnement et la nature du registre de représentation sémiotique. La grille comporte trois catégories de raisonnement, chacune peut contenir plusieurs types de raisonnements différents. La première catégorie correspond aux raisonnements synthétiques, autrement dit que le résolveur n'opère que sur des données et relations connues. La seconde est composée des raisonnements à tendance analytique, soient les raisonnements qui ne respectent pas tous les critères de l'analycité ou qui recourent à un registre de représentation non littéral. La troisième est composée des raisonnements analytiques que l'on retrouve dans une démarche algébrique conventionnelle de résolution. Illustrons ces différents types de catégories de raisonnement par la résolution du problème 1.

<u>Résolution 1- Raisonnement synthétique de type essais-erreurs avec ajustement simple:</u>

Si l'avoir de Chantal en dollars est 51 000 alors celui de Marie serait de 51 000 + 19 000 = 70 000. Leur total vaut donc 121 000. Il est inférieur au total réel (133 000). Il faut donc augmenter la valeur initiale de l'avoir de Chantal. Dans ce type de raisonnement, la valeur de l'ajustement ne prend en compte que la comparaison entre le total obtenu et le total réel. Le résolveur reprend le premier essai avec une valeur plus grande de l'avoir de Chantal. Par exemple, si l'avoir de Chantal en dollars est de 58 000 alors celui de Marie serait de 58 000 + 19 000 = 77 000. Le total serait de 135 000, légèrement plus grand que le total réel (133 000). Un autre ajustement simple est donc nécessaire, on peut vérifier qu'un essai avec un avoir de Chantal en dollars de 57 000 permet de résoudre le problème.

<u>Résolution 2- Raisonnement à tendance analytique de type essais-erreur, avec ajustement raisonné</u>

Les raisonnements de type fausse-position font partie de ce type de raisonnement. Le résolveur choisi une valeur initiale qu'il sait fausse tout en sachant comment il va ajuster ce premier essai à partir de l'écart entre le total obtenu et le total cible. Ce type de raisonnement est à tendance analytique car il est de nature hypothético-déductif, une caractéristique des raisonnements analytiques. En voici une illustration:

Si le montant de Chantal en dollars était de 1000, alors celui de Marie serait de 1 000 + 19 000 = 20 000. Le total serait alors de 21 000. Or, le montant total réel est 133 000. Le montant de 112000 correspondant à la différence entre le total réel et celui obtenu (133 000 – 21 000) est à partager également entre les deux nièces puisque nous avons déjà tenu compte des relations entre les montants des nièces.

$112000 \div 2 = 56000$

Montant ajusté de Chantal: $1000 + 56000 = 57000$ $

Montant ajusté de Marie: $20000 + 56000 = 76000$ $

<u>Résolution 3- Raisonnement à tendance analytique, l'inconnue reste muette</u>

Dans les cinq problèmes d'Arsène Ponton, il est possible de raisonner en termes de parts. Dans ce cas-ci, la part de Marie, en dollars est égale à celle de Chantal augmentée de 19 000. Si l'on soustrait 19 000 du total pour enlever le surplus du montant de Marie par rapport à Chantal: $133000 - 19000 = 114000$, le montant restant correspond alors au double de la part de Chantal. La part de Chantal est donc de 114 000 $ ÷ 2 = 57 000 $ et la part de Marie est de 76 000 $

$57000 + 19000 = 76000$). Ce raisonnement en termes de parts est bien un raisonnement à tendance analytique. Nous avons bien considéré les inconnues et opéré sur elles bien qu'elles n'apparaissent pas explicitement dans les équations. Nous dirons que les inconnues restent muettes.

<u>Résolution 4 – Raisonnement analytique (Inconnues et équations explicites avec perte de lien avec le contexte)</u>

Ce raisonnement se fait avec la méthode algébrique conventionnelle. On utilise les lettres pour représenter les inconnues et on opère sur cette représentation en posant une équation:

Montant de Chantal en dollars: x

Montant de Marie en dollars: x +19000

$x+19000+x=133000$

$2x+19000=133000$

$2x=114000$

$x=57000$

Montant de Chantal: 57 000 $

Montant de Marie: $57000\$+19000\$=76000\$$

Dans le problème 5, contrairement aux problèmes précédents, le montant total des parts n'est pas donné. En revanche, la part de Marie peut être générée de deux façons: par composition de deux relations additives à partir de la part de Chantal ou en doublant le montant de Chantal. On peut penser que la résolution de ce problème de manière synthétique peut s'avérer difficile pour les élèves, car le schéma de résolution de ce problème est différent de ceux des précédents. Voici un raisonnement possible:

Si la part de Chantal en dollars est de 1 000, celle de Marie serait de deux fois plus donc de 2 000. Or selon l'autre relation, après calculs, la part de Marie est de 80 000. Il manque donc 78 000 à la valeur initiale de la part de Chantal. Ajustons alors cette première valeur. Si la part de Chantal en dollars est de 1 000 + 78 000 = 79 000, celle de Marie serait de 158 000, et l'autre relation est bien vérifiée puisque: 79 000 + 36 000 + 43 000 = 158 000.

4. OBJECTIFS SPÉCIFIQUES DE RECHERCHE

Rappelons d'abord l'objectif général énoncé à la fin du premier chapitre qui est de viser à documenter les transformations d'une ressource en lien avec le développement de la pensée algébrique utilisée par un groupe d'enseignants. Suite à l'organisation des différents concepts du cadre de référence, nous pouvons maintenant énoncer les objectifs spécifiques de notre recherche:

1) Identifier et analyser les documents construits par les enseignants à partir de la ressource Arsène Ponton, en considérant autant la dimension ressource que les schèmes d'instrumentation et d'instrumentalisation individuels
2) Décrire les schèmes communautaires partagés par le groupe d'enseignants

CHAPITRE 3: MÉTHODOLOGIE

Ce présent chapitre présente la méthodologie qui sera utilisée pour répondre aux objectifs spécifiques de recherche. Ainsi, le type de recherche mis de l'avant, la population et l'échantillon visés, la ressource utilisée, les outils de collecte de données ainsi que le calendrier de réalisation seront présentés.

1. TYPE DE RECHERCHE

Suivant la visée de nos objectifs spécifiques de recherche, notre recherche est qualitative de type descriptif, car elle vise la description de la genèse documentaire d'une ressource dans la pratique d'un petit groupe d'enseignants (Larose, 2014). Elle sert, en effet, comme le stipulent Gall *et al.* (2005, *In* Lenoir, Y., Hasni, A., Lacourse, F., Maubant, P. et Zaid, A., 2012), à faire des observations détaillées de phénomènes et vise à documenter la pertinence, le contexte et les composantes d'un objet d'étude.

2. POPULATION ET ÉCHANTILLON

Comme nous l'avons présenté plus tôt, notre recherche s'inscrit dans un groupe de travail sur le développement de la pensée algébrique, un projet d'une plus grande envergure. La population visée par notre projet correspond donc à la population du groupe de travail qui s'adresse aux enseignants des commissions scolaires de la région de Québec qui enseignent les mathématiques au secondaire, c'est-à-dire du premier cycle, avant l'introduction formelle de l'algèbre, et du deuxième cycle. L'échantillon de convenance a été retenu pour la méthode d'échantillonnage puisque les candidats ont été sélectionnés sur une base volontaire (Fortin, 2010).

Ce groupe de travail regroupant donc didacticiens, conseillers pédagogiques et enseignants se rencontrent cinq ou six fois par année pour discuter des expérimentations des enseignants et réfléchir sur les différentes façons de développer la pensée algébrique.

Trois enseignants d'une commission scolaire de cette région ont accepté de participer à notre projet. Ces derniers travaillent avec la conseillère pédagogique Lili[21] et ont participé au projet pour la première fois en septembre 2015. Pour des questions de clarté, dans cette recherche, lorsque nous parlerons des chercheurs, des formatrices ou des didacticiennes, nous faisons référence aux même deux personnes.

Gabrielle[22] a enseigné quatre ans dans une ville du centre du Québec et travaille depuis maintenant dix ans dans la commission scolaire de la région de Québec. La situation Arsène Ponton a été expérimentée en février 2016 avec ses élèves de deux de ses groupes qui sont en deuxième année du premier cycle du secondaire. Elle avait expérimenté la situation du restaurant de Marcel (Annexe D) et l'usine à fenêtre (Annexe E) à l'automne 2015 qui sont des situations de généralisation. Avant d'expérimenter Arsène Ponton, l'enseignante a abordé avec eux les différents termes associés à l'algèbre, les opérations avec des expressions algébriques.

Michel[23] travaille comme enseignant dans cette commission scolaire depuis maintenant quinze ans. La situation d'Arsène Ponton est la première que l'enseignant expérimentait en lien avec le groupe sur le développement de la pensée algébrique. Il l'a présentée à un seul groupe d'élèves de deuxième année du premier cycle au mois de janvier 2016. Ces derniers avaient déjà vu la généralisation ainsi les termes algébriques. Arsène Ponton était présenté au début de la résolution de problèmes de partage inéquitable.

Joel[24] a expérimenté Arsène Ponton avec ses quatre groupes d'élèves de deuxième année du premier cycle en novembre 2015. Les élèves n'avaient pas vu la résolution de problèmes écrits ni la résolution d'équations, mais, comme les groupes de deux autres enseignants, ils avaient vu les termes algébriques.

---

[21] Nom fictif.
[22] Nom fictif
[23] Nom fictif
[24] Nom fictif

3. COLLECTE DE DONNÉES

Une fois que le type de recherche est déterminé et que l'échantillon a été identifié, il s'agit maintenant de prendre les moyens nécessaires pour répondre aux objectifs de recherche. En effet, nous voulons documenter les transformations que subit la ressource Arsène Ponton en lien avec le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits utilisée par un groupe d'enseignants. Plus spécifiquement, nous voulons, d'une part, identifier et analyser les documents construits par les enseignants, autant la dimension ressource que les schèmes d'usage individuels développés par les enseignants et, d'autre part, décrire les schèmes communautaires du groupe d'enseignants. Pour ce faire, deux types de données ont été recueillis: des entrevues individuelles et de groupe et des enregistrements vidéo de l'expérimentation en classe et de la journée de formation. Dans la collecte de données, certaines données sont secondaires et ont été collectées dans le cadre du projet de formation. Les chercheuses et les enseignants participants nous ont donné leur consentement pour pouvoir les exploiter dans le cadre de notre recherche. Les enseignants `participant à notre recherche avaient donc déjà expérimenté la tâche Arsène Ponton en classe. Ces derniers avaient reçu la formation par deux didacticiennes, l'ont expérimenté en classe accompagnés de leur conseillère pédagogique et ont fait un retour réflexif. Nous nous sommes impliqués par la suite.

Voici un tableau résumé des différents éléments de la collecte de données.

Tableau 2
Éléments de collecte de données

Moment de la collecte	**Pertinence par objectif**	**Données recueillies**
Avant l'expérimentation	• 1 et 2	• <u>Rencontre de groupe</u>: Présentation de la ressource choisie
	• 1	• <u>Rencontres individuelles:</u> Pré-expérimentation
Pendant l'expérimentation	• 1	• <u>Enregistrement vidéo de la séance</u>

Après l'expérimentation	• 1	• Rencontres individuelles: Post-expérimentation
	• 2	• Rencontre de groupe: retour réflexif focus-groupe sur l'expérimentation
	• 1	• Rencontre avec les formatrices

Pour répondre à la première question spécifique qui consiste à décrire les documents des enseignants, plusieurs données ont été recueillies. Tout d'abord, pour décrire la dimension ressource du document, nous avions besoin des données qui ont permis de ressourcer le travail des enseignants. Ainsi, en plus d'identifier la tâche des élèves (Arsène Ponton) qui a été présentée aux enseignants, nous devions décrire les schèmes des concepteurs présentés aux enseignants en lien avec la situation et avec le développement de la pensée algébrique en lien avec la résolution de problèmes écrits. Pour ce faire, nous avons amassé les documents de formation que les didacticiens utilisaient lors des rencontres de travail avec les enseignants sur le développement de la pensée algébrique et sur la résolution de problèmes écrits. De plus, nous avons également eu accès à la vidéo de la rencontre de formation des enseignants lors de la présentation de la situation Arsène Ponton. Par la suite, pour valider notre première analyse de ces documents, nous avons validé les schèmes des concepteurs, faisant partie de la dimension ressource, lors d'une rencontre avec les formateurs.

Pour décrire la deuxième portion de la première question de recherche, c'est-à-dire de décrire les schèmes individuels des enseignants à travers les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, des entrevues ont été réalisées avec chacun des enseignants. L'entrevue a eu lieu après l'expérimentation en classe pour connaître les réactions spontanées de l'enseignant et pour mieux comprendre certains de ses comportements et pour connaître ce qui, selon l'enseignant, s'est passé comme il avait été prévu. De plus, c'est l'occasion de voir ce qui a été surprenant de la part des élèves, autant des difficultés inattendues que des réussites surprises. Nous avons l'enregistrement de l'entrevue de Gabrielle et de Joel, mais il nous manque celle de Michel.

Toujours pour répondre au premier objectif spécifique, l'enregistrement vidéo de la séance en classe a été considéré. Comme nous nous intéressons au travail de l'enseignant, il a fallu capter l'enseignant avec la caméra pour recueillir ses différentes interventions. Par ses propos en classe lors de l'expérimentation, plusieurs données peuvent nous ont été utiles. Finalement, comme nous n'avons pas eu la chance de guider l'expérimentation depuis le début, nous n'avons pas eu accès aux documents de planification de l'enseignant. Ces documents auraient pu être intéressants pour identifier les transformations de la ressource par l'enseignant et les éléments de planification du déroulement de la classe. Pour obtenir ces informations, nous avons posé des questions à ce sujet lors de la rencontre focus groupe ainsi que lors d'entrevues individuelles pour valider les schèmes potentiels. Aussi, nous n'avons eu accès qu'à l'enregistrement vidéo en classe que pour l'enseignante Gabrielle étant donné qu'il y avait des contraintes de consentement dans certaines classes.

Pour répondre au deuxième objectif spécifique de recherche qui consiste à décrire les schèmes communautaires partagés par la communauté, des entrevues de groupes ont été organisées. Il y a d'abord eu une rencontre lors de la présentation de la ressource choisie pour un travail d'appropriation de la ressource avec les formateurs. Finalement, une rencontre de groupe lors du retour réflexif sur les expérimentations a eu lieu pour nous dévoiler les schèmes communautaires partagés par les membres de la communauté. Voici un tableau résumé des différents types de données ainsi que la source des données, provenant du groupe de travail ou de notre propre collecte de donnée.

Tableau 3
Différents types de données

Types de données	**Objectif visé**	**Source des données**
Documents de formation des enseignants	Identification de la ressource	Groupe de travail
Enregistrement vidéo de la journée de formation	Identification de la ressource	Groupe de travail

Enregistrement vidéo de l'expérimentation en classe	Identification des schèmes d'utilisation de Gabrielle	Groupe de travail
Enregistrement vidéo du retour réflexif		Groupe de travail
Enregistrement vidéo du retour réflexif	Identification des schèmes d'utilisation de Joël	Groupe de travail
Enregistrement audio de la rencontre avec les formatrices	Identification de la ressource	Notre collecte de donnée
Enregistrement audio du focus groupe	Identification des schèmes individuels et communautaires des enseignants	Notre collecte de donnée

4. MÉTHODE DE TRAITEMENT ET ANALYSE DES DONNÉES

Comme nos données sont de nature qualitative, nous avons choisi des méthodes de traitement de données qui nous ont permis de comprendre le phénomène plutôt que de le mesurer.

4.1 L'analyse thématique

Voici un tableau résumé présentant les différentes méthodes utilisées pour répondre aux objectifs de recherche.

Tableau 4

Méthodes de traitement et d'analyse des données

<table>
<tr><th colspan="2"><u>Méthodes pour répondre à l'objectif 1</u></th><th colspan="2"><u>Méthodes pour répondre à l'objectif 2</u></th></tr>
<tr><td rowspan="2">Méthodes pour décrire la dimension ressource</td><td>Analyse thématique du verbatim de l'enregistrement vidéo de la journée de formation</td><td rowspan="2">Méthodes pour décrire les schèmes communautaires</td><td rowspan="2">Analyse thématique de l'enregistrement vidéo du focus groupe et des schèmes en construction</td></tr>
<tr><td>Analyse thématique de l'enregistrement audio</td></tr>
</table>

	de l'entrevue avec les formatrices		formulés suite aux analyses
Méthodes pour décrire les schèmes d'utilisation	Analyse thématique de l'enregistrement vidéo de l'expérimentation de Gabrielle en classe		
	Analyse thématique de l'enregistrement audio du retour réflexif de Gabrielle et de Joel		
	Analyse thématique de l'enregistrement vidéo du focus groupe		

Tout d'abord, nous avons fait l'analyse thématique du verbatim de la vidéo de la rencontre de formation avec la tâche Arsène Ponton. Lors de cette rencontre, les formatrices ont dévoilé des principes didactiques en lien avec le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits et, plus précisément, par la tâche Arsène Ponton. Nous avons donc rassemblé différents extraits qui nous permettaient d'identifier ces principes et les avons regroupés par thèmes. Cela nous a permis de faire des hypothèses de principes didactiques. Ces hypothèses nous ont permis de construire le questionnaire d'entrevue pour la rencontre avec les formatrices (voir Annexe B). Cette rencontre a eu lieu dans le but de confirmer, infirmer ou compléter les différents principes identifiés.

L'analyse thématique des verbatims nous a également permis de réaliser un premier traitement de la transcription de l'enregistrement de l'expérimentation de l'enseignante Gabrielle. Les thèmes identifiés ont été déterminés par une première formulation des règles d'action. Par exemple, les extraits qui correspondaient aux moments dans lesquels l'enseignante a demandé aux élèves de raisonner en termes de parts, nous avons formulé la règle d'action suivante: *Dans les problèmes de partage inéquitable, dire explicitement aux élèves de raisonner en termes de parts*. Nous avons fait de même pour les deux enregistrements des retours réflexifs de Gabrielle et de Joel. Lorsque nous avons identifié les règles d'action, nous nous sommes questionnés à savoir les buts derrière les actions. Nous avons donc fait des hypothèses. Les règles d'action ainsi que leur but ont permis de construire le guide d'entrevue pour la rencontre focus groupe. Cette rencontre qui, au départ, avait pour but d'identifier les schèmes communautaires des enseignants, s'est avérée beaucoup plus utile. En effet, comme nous n'avions pas l'enregistrement du retour réflexif de Michel, nous en avons profité pour poser le même genre de questions qui ont été posées aux deux autres enseignants lors de leur retour réflexif. De plus, comme nous avions déjà fait une première analyse, nous avons posé des questions pour confirmer ou infirmer nos hypothèses de règles d'action ainsi que leur but (voir Annexe C) pour pouvoir ensuite formuler les théorèmes-en-acte.

Suite à cette rencontre, nous avons pu continuer notre travail d'analyse en formulant les différentes composantes de la dimension schèmes d'utilisation (règles d'action, les buts de ces règles et les théorèmes-en-acte). Les règles d'action n'étaient donc pas toutes basées sur des actions que les enseignants avaient faites en classe, mais aussi sur leur discours en classe, leurs paroles lors du retour réflexif et lors du focus groupe.

Une fois les règles d'action écrites, nous avons aussi analysé les apprentissages qu'elles pourraient favoriser. Cela nous a permis de formuler les théorèmes-en-acte, sous la forme des propositions tenues pour vraies par les enseignants qui incluent les apprentissages en lien avec le développement de la pensée algébrique.

CHAPITRE 4: RÉSULTATS

1. LA RESSOURCE-FORMATION

Nous présentons maintenant la ressource-formation. Rappelons que la tâche Arsène Ponton a été présentée aux enseignants dans un but de formation et non dans le but de présenter une situation exemplaire pour la pratique. Voici à ce sujet les propos Milène[25] lors d'une entrevue:

> L'activité a été bâtie, ce n'était pas dans une intention première que: ben voici on vous montre de beaux problèmes à utiliser avec vos élèves. Tu sais, ce n'était pas cet enjeu-là. On n'est même pas allé à se poser cette question-là je te dirais. C'était davantage, on réutilisait cette ressource-là, parce que nous-mêmes on y a reconnu un potentiel pour aider à la réflexion des enseignants.

1.1 Consignes pour la réalisation de la Tâche Arsène Ponton

La tâche demandée aux enseignants lors de la formation est de résoudre la série des cinq problèmes dans l'ordre, sans utiliser l'algèbre, de trouver à partir de quelle étape l'algèbre est nécessaire pour résoudre le problème et quelles sont les différences d'une étape à l'autre. Lors de cette formation, des principes didactiques ont également été expliqués en lien avec la nature des problèmes ainsi qu'en lien avec le développement de la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes. Ces principes sont tirés de la vidéo de la journée de formation des enseignants sur l'approche par résolution de problèmes écrits, des documents de formation des deux didacticiennes, Milène et Mégane, sur le développement de la pensée algébrique ainsi que de l'entrevue que nous avons réalisée avec celles-ci. L'analyse de ces principes permet de rendre compte de la raison d'être de la tâche Arsène Ponton et des intentions de formation poursuivies par les formatrices.

[25] Nom d'emprunt de l'une des deux didacticiennes formatrices. Nous utiliserons le nom Mégane pour la seconde.

1.2 L'approche par résolution de problèmes écrits est une des approches essentielles pour le développement de la pensée algébrique

Dans le cadre de la formation de ce groupe de travail, les formatrices préconisent plusieurs approches pour développer la pensée algébrique chez les élèves: généralisation dans le contexte de suites (par des représentations visuelles), la modélisation (par des contextes issus du réel), généralisation de relations fonctionnelles (qui inclut l'approche de covariation) et la résolution de problèmes écrits. Elles se sont inspirées des travaux de Bednarz et Janvier que nous avons présentés précédemment. Ainsi, selon elles, l'approche par résolution de problèmes écrits est une composante essentielle pour le développement de la pensée algébrique puisqu'elle fait travailler le sens de la lettre « inconnue » que l'approche par la généralisation ne fait pas nécessairement. Par contre, il est nécessaire, sur le plan opératoire, de travailler les différents autres sens de la lettre pour développer cette pensée et donc de recourir aux autres approches. L'approche par résolution de problèmes écrits ne peut, à elle seule, développer la pensée algébrique chez les élèves. Mégane le formule comme ceci:

> Ben si on veut que nos élèves soient capables de résoudre des problèmes exprimés en mots dont le statut de la lettre est inconnue, il faut passer par l'approche par résolution de problèmes écrits, sinon on manque le bateau.[…] exprimer ce qui devrait être développé en algèbre au premier cycle du secondaire, ça ne doit pas passer exclusivement par l'approche par résolution de problèmes écrits, parce que si tel est le cas, on aide pas du tout pour le travail qui doit être fait en troisième secondaire. Il faut travailler le statut de la lettre variable.

1.3 Les problèmes déconnectés favorisent le développement du raisonnement analytique

Comme nous l'avons vu dans le cadre de référence, ce principe découle des travaux de Bednarz et Janvier (1996) qui montrent que les problèmes déconnectés favoriseraient les élèves à raisonner de manière analytique, contrairement à des problèmes connectés de partage inéquitable où l'élève n'a qu'à partir d'une grandeur connue pour trouver les autres grandeurs inconnues à l'aide des relations connues:

> Le premier problème, quand tu prends le premier, c'est un problème source avec deux grandeurs. Donc, c'est un problème qui est, si on regarde la grille de complexité, c'est un problème qui se résout très facilement avec des raisonnements arithmétiques, même analytique sans utiliser la lettre. […] Dans ce type de problèmes [Problème 1], les résolutions auxquelles tu peux t'attendre ne sont pas très riches finalement. Alors que dans celui-là [Problème 5], ça ouvre la porte à différents raisonnements puis à déjà une schématisation possible.

Ces problèmes déconnectés mettent donc à défaut ces raisonnements arithmétiques simples puisque l'élève doit maintenant considérer l'inconnue et opérer sur elle « comme si » elle était connue. Il est donc important, selon Mégane, que les enseignants s'attardent aux différents types de problèmes de partage inéquitable qu'ils proposent à leurs élèves pour favoriser le raisonnement analytique.

1.4 Le raisonnement en termes de parts est un raisonnement à tendance analytique

La manifestation du raisonnement analytique lors de la résolution des problèmes d'Arsène Ponton est un enjeu central pour les formatrices. Pour elles, le but est d'amener les enseignants à raisonner sur les parts, sans utiliser le langage littéral de l'algèbre. Le fait de raisonner en termes de parts les amène à raisonner sur l'inconnue. Par la suite, étant donné que les enseignants ont eux-mêmes vécu l'expérience en tant que « mathématiciens » lors de la formation, il était plus facile d'accepter que de raisonner les parts est un raisonnement analytique. Mégane le confirme:

> Ben si ça c'est notre ancrage premier, ce qui est la particularité dans cette activité-ci, c'est lorsqu'ils raisonnent sur les parts […] Mais le raisonnement sur les parts, pour eux, n'est pas toujours un raisonnement analytique. On essaie de leur faire voir justement, c'est qu'à partir du moment que tu peux accepter de rentrer dans ce jeu-là, de calculer le nombre de parts, c'est que nécessairement tu acceptes de faire « comme si » tu les connaissais.

Cette prise de conscience est essentielle pour comprendre que lorsqu'ils raisonnent en termes de parts, ils raisonnent de manière analytique et l'intégration du symbolisme algébrique peut se faire facilement par la suite puisqu'il a maintenant du sens.

1.5 L’approche par résolution de problèmes écrits travaille le sens de la lettre inconnue

Un des enjeux importants des formatrices est que les enseignants prennent conscience de ce qu’ils font et de la portée des actions faites pour enseigner l’algèbre pour avoir un regard plus critique. Ainsi, il était important, selon les didacticiennes, que les enseignants sachent que la résolution de problèmes de partage inéquitable contribue au développement de la pensée algébrique pour travailler le sens de la lettre inconnue: « Donc, pour nous, l’approche par résolution de problèmes, […] c’est aussi de faire prendre conscience aux enseignants qu’on travaille le sens de la lettre inconnue dans cette approche-là. » Ainsi, comme les enseignants savent aussi que pour développer la pensée algébrique, l’élève doit, entre autres, travailler les différents sens de la lettre, ils feront des choix plus éclairés au niveau didactique.

1.6 L’approche par résolution de problèmes écrits est un prétexte pour l’apprentissage de la mise en équation algébrique

Lors de la discussion avec les enseignants lors de la rencontre de formation, avant la résolution de la tâche par les enseignants, ces derniers ont demandé aux formatrices s’ils devaient utiliser ce type de problèmes avant l’introduction de l’algèbre formelle. Voici ce qu’elles ont répondu:

> Mégane: Oui. L’idée, ça serait de…l’approche par résolution de problèmes écrits devrait être un prétexte pour traduire sous forme d’équation algébrique. […] C’est qu’on devrait s’en servir, comme c’est le cas par l’approche par modélisation où là la formule émerge, mais à travers le discours des élèves. Puis là l’approche par résolution de problèmes écrits dit: tu proposes des problèmes. Dans le fond, c’est pour gagner un stade, il faut que tu te donnes des outils pour bien résoudre. Parce que tu ne seras plus capable.

Selon elles, l’approche par résolution de problèmes écrits déconnectés est donc un prétexte pour faire émerger le besoin de traduire les relations entre les inconnues sous forme d’équations algébriques. En effet, selon leur proposition du développement de la pensée algébrique dans le curriculum d’algèbre, l’approche par généralisation vient au départ, mais la généralité attendue n'est pas nécessairement sous forme d'équations. Ainsi, par la suite, dans la résolution de problèmes, selon la séquence de problèmes proposée aux élèves, ces derniers devraient sentir qu'ils n'ont plus les outils pour bien traduire les relations entre les inconnues. Le besoin de traduire sous forme d'équations dans un langage plus explicite devrait émerger. C'est que nous croyons que Mégane veut dire par « gagner un stade », c'est-à-dire de maintenant pouvoir représenter les inconnues par le langage littéral de l'algèbre qui sera un outil plus efficace pour résoudre les problèmes. En effet, elle mentionne qu'à partir d'un moment, ils ne seront « plus capables » de résoudre les problèmes écrits sans le langage formel. Le but de proposer ces problèmes seraient donc gagner ce stade en faisant émerger le besoin de traduire sous forme d'équations algébriques.

1.7 Le développement de la pensée algébrique est un prétexte pour introduire l'algèbre formelle.

Les formatrices ont également apporté une précision lors de la rencontre avec elles. Selon leur vision, le développement de la pensée algébrique se ferait sans « enseignement de l'algèbre formelle » contrairement à ce que l'on peut voir présentement dans plusieurs classes du Québec. En effet, les enseignants réservent un chapitre spécialement pour introduire les termes algébriques ainsi que les opérations. Selon les formatrices, en passant par les différentes approches, l'enseignant pourrait maintenant saisir les différentes occasions qui s'offrent à lui pour parler du langage algébrique et des manipulations d'expressions. Milène nous donne un exemple dans l'approche par généralisation pour intégrer le langage formel:

> N'importe quelle situation de généralisation, on leur fait voir que oui il faut que l'élève génère la formule, mais le travail peut ne pas s'arrêter là. On peut aller plus loin avec eux. On dit: ok ben là on va s'en aller vers la résolution d'équations…toutes les questions qui nous amènent vers la résolution d'équations, toutes les questions qui nous amènent vers la manipulation d'expressions algébriques. Puis on pourrait même transformer la question pour aller faire de la covariation avec eux.

Par exemple, si deux élèves ont donné deux messages différents équivalents en mots ou de façon symbolique, ce serait l'occasion pour les enseignants d'aborder la manipulation d'expressions pour montrer l'équivalence des deux messages puisque cela aurait du sens pour les élèves. L'enseignant n'aurait donc plus besoin de réserver une partie de sa séquence d'enseignement exclusivement aux termes et à la manipulation d'expressions algébriques.

D'autre part, d'une visée plus pragmatique, Mégane a remarqué qu'en première année du deuxième cycle du secondaire, ce qui est difficile pour les élèves n'est pas de manipuler les expressions algébriques. Le plus dur pour eux est de traduire les relations entre les inconnues d'un problème. Comme il est possible de le faire sans utiliser le langage littéral de l'algèbre, la formatrice s'est donc dit que ces problèmes déconnectés pourraient aider en ce sens s'ils sont travaillés plus tôt.

1.8 Les problèmes d'Arsène Ponton doivent être résolus sans utiliser la méthode algébrique

Toujours lors de la journée de formation avec les enseignants, les didacticiennes leur ont demandé de résoudre les problèmes de la tâche d'Arsène Ponton sans utiliser une algèbre explicite, c'est-à-dire de ne pas utiliser les lettres. Étant donné que les sujets de notre recherche sont compétents en algèbre, ils auraient probablement utilisé cette méthode de résolution plus efficace s'ils avaient eu le choix. Comme ils avaient la contrainte de ne pas utiliser le langage littéral de l'algèbre, cela ouvrait la porte à différentes résolutions, comme l'explique Mégane:

> Donc, on a mis une contrainte qu'ils ne résolvent pas les problèmes…ben qu'ils essaient le plus possible de ne pas les résoudre en utilisant une algèbre explicite. Ça, c'est quand même important que tu puisses le savoir parce que sinon on n'aurait peut-être pas eu une diversité de résolutions.

Par la suite, selon les formatrices, lorsque différentes résolutions sont ressorties, elles s'intéressent aux différents raisonnements mobilisés dans chacune de celles-ci: « D'un côté, c'est de regarder les raisonnements qui sont mobilisés pour faire la différence entre différents raisonnements. » (Propos de Mégane lors de l'entrevue). En effet, selon elles, les enseignants pouvaient avoir des raisonnements autant arithmétiques qu'analytiques ou autres et le but était d'aller faire la distinction entre ces types de raisonnements avec les enseignants. D'autre part, les formatrices espéraient que les enseignants aient opéré sur l'inconnue en termes de parts pour qu'ils comprennent qu'il est possible de raisonner de manière analytique sans utiliser l'algèbre explicite:

> Donc là ce qu'ils faisaient…vous essayez de ne pas la prendre [l'algèbre explicite]. Donc là ils…pour essayer de raisonner sur le nombre de parts et tout ça jusqu'à ce qu'ils arrivent au problème 5 où là eux-mêmes le disent: Non, là là, est-ce que c'est normal ? Mais moi c'est l'algèbre que je veux prendre. (Propos de Mégane lors de l'entrevue)

Il nous semble que la maîtrise de la démarche algébrique conventionnelle, c'est-à-dire en résolvant un problème à l'aide du langage algébrique (les lettres), est un obstacle au recours à des raisonnements d'autres types comme des raisonnements illustrés dans la résolution du problème 1 dans le chapitre 2. En privant les enseignants de l'utilisation de la méthode algébrique de résolution, les enseignants sont mis dans une posture proche de celle des élèves qui ne disposent pas encore de l'outil algébrique. Ainsi, grâce aux connaissances développées lors de son expérimentation, l'enseignant peut adapter son enseignement pour viser à ce que les élèves vivent les mêmes enjeux qu'il a lui-même vécu. Dans ce cas-ci par exemple, les enjeux étaient de raisonner en termes de parts, de schématiser le problème afin de voir les différentes relations et arriver à un point où le raisonnement sur les parts avec les schémas n'est plus un moyen assez opérationnel pour résoudre le problème (problème 5).

1.9 La résolution de la tâche Arsène Ponton permet de faire prendre conscience des différents types de problème de partage inéquitable

En plus des différents enjeux de la formation sur le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits, la formation plus spécifiquement par la tâche d'Arsène Ponton, avec ses cinq problèmes de partage inéquitable, avait plusieurs buts. Tout d'abord, au cours de la formation, lors du retour en grand groupe après l'expérimentation par les enseignants, Mégane est revenue sur chacun des problèmes en commençant par le problème 1 jusqu'au problème 5 et en insistant sur leurs différences. Elle parle de ses intentions aux enseignants:

> Mon premier élément, c'était que vous remarquiez que: c'est drôle, quand je les lis, ils se ressemblent tous. Ils se résolvent tous de la même manière, puis là tu es en train de me dire qu'ils ne sont pas tous pareils? […] Si, pour le moment, ça veut juste dire que vous repartez en vous disant: écoute, je ne suis pas encore tout à fait à l'aise, mais maintenant quand je vais l'ouvrir mon manuel, […] je le sais qu'il existe différentes classes de problèmes.

La formatrice le dit donc explicitement qu'un de ses buts est que les enseignants sachent qu'il existe différents types de problèmes de partage inéquitable et qu'ils sachent les reconnaître même s'ils se ressemblent tous. Elle veut également leur faire prendre conscience qu'en utilisant la méthode algébrique conventionnelle de résolution, le niveau de difficulté est moins apparent. Par contre, ils doivent savoir qu'il existe tout de même des différences significatives pour les élèves lorsqu'ils le résolvent sans l'algèbre explicite. En effet, comme nous l'avons vu, les cinq problèmes de partage inéquitable sont classés par ordre de complexité et les formatrices mentionnent que c'est appuyé par la recherche:

> On s'appuie sur la grille de Bednarz et Janvier[26] reprise par Marchand[27] que nous avons repris après avec Hassane et Adolphe[28]. C'est quelque chose qui est très connu, c'est les problèmes de comparaison. Il y a différents types de problèmes. Il y a source, composition et puis puits. Ça a été prouvé dans les trois recherches menées que ces problèmes-là sont gradués en ordre de complexité donc les problèmes sources sont toujours plus simples que les problèmes composition qui sont eux-mêmes plus simples que les problèmes puits. (Bednarz et Janvier, 1996)

Donc, les formatrices veulent montrer aux enseignants les différents niveaux de complexité pour les élèves à travers ces différents types de problèmes:

> Puis, de l'autre côté, c'est d'aller voir que les problèmes où y'a le même énoncé, où y'a souvent le même nombre de grandeurs, ben le niveau de complexité n'est pas le même. Qu'est-ce qui fait que le niveau de complexité change ? Donc, c'est d'aller s'attarder sur l'enchainement des

[26] Bednarz et Janvier (1992)
[27] Marchand (1997)
[28] En référence à Hassane Squalli et Adolphe Adihou dans les actes du colloque GDM 2013

> relations de comparaison, schématiser le tout. (Propos de Mégane lors de l'entrevue)

Mégane nous résume bien deux des enjeux principaux de la formation avec la tâche d'Arsène Ponton: « Y'en a une qui est de l'ordre de l'expression de la diversité des raisonnements qu'on peut mobiliser pour résoudre les problèmes, puis l'autre, c'est de s'intéresser à la structure des problèmes. » De plus, la tâche Arsène Ponton a été présentée tout juste avant une activité qui consiste à analyser les manuels qu'ils utilisent en classe. Si les enseignants savent reconnaître les différents types de problème, ils sont plus outillés pour choisir les problèmes des manuels qu'ils présentent à leurs élèves et en choisir de nouveaux pour compléter en fonction de leur objectif.

1.10 Le problème 5: un problème qui force le traitement algébrique

Finalement, un dernier aspect de la formation à considérer est le dernier problème de partage inéquitable proposé dans la tâche Arsène Ponton. Comme nous l'avons vu, le montant total n'est pas donné et une relation est ajoutée entre les inconnues. De plus, il est possible de le résoudre sans le langage algébrique, mais nous pouvons comprendre qu'il est plus difficile de le faire étant donné que le montant total n'est pas donné contrairement aux quatre problèmes précédents. Selon les didacticiennes, il n'est pas possible de résoudre le dernier problème, même si l'enseignant raisonne de manière analytique:

> Quelqu'un qui accepte de raisonner sur l'inconnue comme s'il était connu, sans lettres, il peut les résoudre. Mais est-ce qu'il peut tous les résoudre ? La réponse est non. Fait que c'est quoi les ingrédients que ça prend pour obliger un traitement purement algébrique ? Là notre activité vise à ça. […] Elle a été développée justement pour obliger un traitement algébrique. (Propos de Mégane lors de la formation)

Ce dernier problème est plus difficile à résoudre en termes de parts. La représentation de celles-ci n'est plus assez opérationnelle et c'est pourquoi le langage algébrique devient alors un besoin. Toujours grâce au fait que les enseignants ne le résolvent pas à l'aide de la méthode algébrique, il semblerait qu'ils prennent plus facilement conscience de l'enjeu du problème 5 à la suite des autres problèmes qui est de favoriser l'émergence du besoin du traitement algébrique:

> Quand on passe du problème 4 au problème 5, là on est en train de changer la structure du problème. Il y a quelque chose d'autre. Puis là on les amène à dire: oui ben là là, sans une algèbre explicite, j'ai de la misère à le résoudre. Puis là, on gagne beaucoup. (Propos de Mégane lors de l'entrevue)

Ces principes didactiques ont donc été présentés aux enseignants à travers la formation.

- La tâche d'Arsène Ponton est un outil de formation.
- L'approche par résolution de problèmes écrits est une des approches essentielles pour le développement de la pensée algébrique
- Les problèmes déconnectés favorisent le raisonnement analytique.
- Le raisonnement en termes de parts est un raisonnement à tendance analytique.
- L'approche par résolution de problèmes écrits travaille le sens de la lettre inconnue.
- L'approche par résolution de problèmes écrits est un prétexte pour l'apprentissage de la mise en équation algébrique.
- Le développement de la pensée algébrique est un prétexte pour introduire l'algèbre formelle.
- Les problèmes d'Arsène Ponton doivent être résolus sans utiliser la méthode algébrique.
- La résolution de la tâche Arsène Ponton permet de faire prendre conscience des différents types de problème de partage inéquitable.
- Le problème 5: un problème qui force le traitement algébrique

Voyons comment la tâche Arsène Ponton et les principes didactiques des formatrices dévoilés aux enseignants lors de la formation ont été intégrés par les trois enseignants expérimentateurs. Cette prochaine section présentera les différents schèmes en construction par les enseignants au fil de l'intégration de la ressource dans leur pratique.

2. CAS DES ENSEIGNANTS

2.1 Cas de l'enseignante Gabrielle

Voici, dans le tableau suivant, une synthèse du premier schème développé par l'enseignante Gabrielle:

Tableau 5

Schème 1 (G1): Arsène Ponton doit être présenté après la manipulation d'expressions algébriques et avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique.

Règle d'action	Proposer la tâche Arsène Ponton aux élèves avant la résolution de problèmes écrits
But	Montrer la pertinence du traitement algébrique dans les problèmes écrits.
Théorème-en-acte	La tâche d'Arsène Ponton dévoile le potentiel du traitement algébrique dans la résolution de problèmes écrits.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, Gabrielle fait partie du groupe de travail depuis une année seulement, donc elle est arrivée à la troisième année. Elle enseigne à des groupes de deuxième année du premier cycle du secondaire, l'année qui est destinée, au Québec, à l'apprentissage de l'algèbre. L'enseignante a expérimenté la tâche d'Arsène Ponton avec deux de ses groupes. Dans sa planification générale, l'enseignante avait réservé une série de quelques leçons pour enseigner les termes algébriques. Lors de son expérimentation, elle avait déjà enseigné ce sujet à ses élèves ainsi que les manipulations d'expressions algébriques. En effet, dans sa planification initiale de l'année, Gabrielle enseignait les termes algébriques et utilisait ensuite le langage formel de l'algèbre dans des problèmes écrits. C'était son choix de le faire après l'enseignement de l'algèbre plus formel pour le faire juste avant l'introduction à la résolution de problèmes écrits. Pour elle, la tâche Arsène Ponton est un moyen pour montrer la pertinence d'utiliser l'algèbre dans les problèmes écrits.

Lorsque l'enseignante a présenté la tâche à ses élèves, elle n'a apporté aucune modification par rapport à celle qui lui a été présentée en formation. Elle leur a présenté la même feuille, mais elle a apporté des indications plus particulières au début du cours:

> Puis aussi on va voir comment on fait pour utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes écrits. Puis aujourd'hui, ce qu'on va faire, je vous ai préparé cinq problèmes. Puis, avant de vous montrer comment faire pour utiliser l'algèbre pour résoudre ces problèmes-là, je veux voir c'est quoi votre logique à vous, comment vous feriez pour résoudre ces problèmes-là, sans nécessairement utiliser l'algèbre. Parce que ces problèmes-là, c'est des problèmes pour lesquels on peut en utiliser, mais on est capable aussi, quand on a une bonne mathématique, de les résoudre sans avoir recours à l'algèbre.

Le tableau suivant présente les composantes du deuxième schème de Gabrielle:

Tableau 6

Schème 2 (G2): Les élèves peuvent résoudre les problèmes de la tâche Arsène Ponton sans l'algèbre explicite et de le faire comme ils le veulent favorise leur engagement

Règle d'action	Demander aux élèves de résoudre les problèmes comme ils le veulent, sans être obligés d'utiliser l'algèbre.
But 1	Faire prendre conscience aux élèves qu'ils sont capables de résoudre des problèmes « algébriques » sans utiliser les lettres.
Théorème-en-acte 1	Les élèves sont capables de résoudre des problèmes algébriques sans utiliser le langage littéral de l'algèbre.
Théorème-en-acte 2	Les problèmes d'Arsène Ponton peuvent être résolus sans les lettres.
But 2	Engager les élèves dans la tâche
Théorème-en-acte	Avoir la liberté de résoudre un problème comme ils le veulent favorise l'engagement des élèves.

Comme elle a déjà vu le langage littéral de l'algèbre avec eux, elle en parle et explicite les buts de leur présenter la tâche. Par contre, même si elle a déjà vu l'algèbre et que le but est de leur montrer la pertinence de l'algèbre dans les problèmes, elle leur dit de résoudre le problème comme ils le veulent. Nous pensons à ce moment qu'elle veut recréer ce qu'elle a vécu en formation pour provoquer les mêmes apprentissages qu'elle a faits avec cette consigne. Comme elle a senti le besoin d'utiliser le langage explicite de l'algèbre dans ces conditions, elle redonne donc les mêmes consignes à ses élèves en espérant que cela provoque le même raisonnement. D'autre part, avec cette consigne, elle a voulu montrer aux élèves qu'ils ont déjà plusieurs connaissances en lien avec l'algèbre et ainsi diminuer le stress qui lui est souvent associé: « C'était de leur montrer qu'ils étaient capables de, d'arriver à trouver des réponses, qu'ils connaissaient déjà un petit peu de chose si on veut par rapport à l'algèbre, qu'ils étaient capables de se débrouiller avec ça. »

L'enseignante sait donc que ces problèmes peuvent être résolus sans les lettres. Lors du retour réflexif, elle nous a également fait part du fait qu'elle avait remarqué un engagement significatif de la part des élèves. Elle croit que cela est dû au fait qu'elle leur laissait carte blanche pour la résolution des problèmes et que cela leur a donné un défi:

> Enseignante: […] Ouais, j'aime vraiment ça. Puis dans mon autre groupe, c'était la même chose, celui qu'on n'a pas filmé. J'ai remarqué les mêmes choses, que les jeunes s'investissent plus dans ce temps-là.
> Lili: Parce qu'ils sont capables de le faire sans utiliser l'algèbre peut-être.
> Enseignante: Ouais.
> Lili: Quand tu peux utiliser la méthode que tu veux, peut-être qu'ils ont plus le goût de s'investir.
> Enseignante: Ouais.

Le tableau 7 synthétise le troisième schème de Gabrielle:

Tableau 7

Schème 3 (G3) – Le raisonnement en termes de parts dans les problèmes de partage inéquitable favorise la compréhension.

Règle d'action	Dire explicitement aux élèves de raisonner en termes de parts dans les problèmes de partage inéquitable
But	Faire comprendre le problème aux élèves
Théorème-en-acte	Raisonner en termes de parts favorise la compréhension des problèmes de partage inéquitable déconnectés.

Par la suite, lors de l'expérimentation en classe, l'enseignante a laissé les élèves résoudre les problèmes. Au début, ils résolvaient individuellement, elle les a placés ensuite en équipe de deux pour qu'ils comparent leurs méthodes et qu'ils se l'expliquent. Pour faire le retour en grand groupe, elle commence avec le problème 1 et cible des élèves qui avaient des raisonnements différents. Elle leur demande de venir les expliquer au tableau. L'enseignante nous a fait remarquer qu'aucun des élèves n'a utilisé la méthode avec l'algèbre explicite. Après avoir examiné avec les élèves quelles méthodes avaient donné un bon résultat, en vérifiant les conditions de départ (si le montant total et le lien entre les inconnues sont respectés), elle a ensuite fait le lien avec les parts: « Des problèmes comme ça où on a des montants à partager, là écoutez bien, c'est un petit truc qui est important, c'est de s'imaginer des nombres de part. Ça va vous aider dans la compréhension de ces problèmes-là. » Elle reprend chacun des raisonnements des élèves et explique comment ils pourraient faire pour raisonner en termes de parts. Elle pointe également les erreurs de raisonnement des élèves et de quelles façons ils seraient arrivés à la bonne réponse. Le fait de leur montrer de raisonner en termes de parts montre que l'enseignante croit que c'est la clé pour la compréhension de ces problèmes et qu'il est important de le faire dès le début pour être habile dans les autres problèmes plus difficiles. Le quatrième schème est présenté dans le tableau synthèse suivant:

Tableau 8

Schème 4 (G4) – La représentation des parts par un dessin favorise la représentation des relations.

Règle d'action	Représenter par un dessin les parts
But	Montrer à l'élève à utiliser la schématisation pour représenter les relations et opérer sur la représentation.
Théorème-en-acte	Représenter les parts par un dessin favorise la représentation symbolique des relations et les opérations sur celle-ci.

Lorsque l'enseignante a montré aux élèves les raisonnements en parts, elle les a également schématisés en grand groupe. En effet, pour le problème 1, lorsqu'elle parlait du montant de Chantal, elle a fait un cercle au tableau et, pour Marie qui a 19 000 de plus que Chantal, elle a fait un autre cercle + 19 000. Ensuite, elle a ajouté le total en-dessous pour montrer qu'ensemble elles avaient 133 000, comme le montre la Figure 4 ci-dessous.

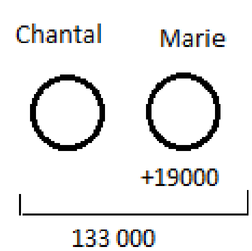


Figure 4: Schématisation du problème 1 par l'enseignante[29]

Lorsqu'elle revient sur les différents raisonnements des élèves, elle se réfère toujours au schéma et opère sur la représentation pour trouver les valeurs des inconnues. Nous pouvons nous douter que ce schème a bien été développé puisque nous avons vu ce schème se manifester une fois dans chaque classe de façons différentes. Dans le premier groupe, l'enseignante est intervenue avec quelques équipes pour leur faire le dessin et, dans le deuxième groupe, elle a fait le dessin en grand groupe. L'enseignante nous explique que le schéma était utile pour comprendre les relations entre les inconnues:

> Je leur faisais le dessin, mais sans leur dire vraiment qu'il faut que tu enlèves le 19 000 au début, mais on dirait qu'avec le dessin, ils le voyaient plus. Tu sais, ça les amenait à découvrir que pour savoir combien il y a dans chacune des deux parts qui sont égales, il faut que tu commences par enlever le 19 000 avant de diviser par deux.

Le tableau 9 présente le schème 5 de Gabrielle:

Tableau 9

Schème 5 (G5) – La maîtrise du système de représentation intermédiaire indique que le passage au langage littéral de l'algèbre peut être provoqué.

Règle d'action	Demander de rechercher un système de représentation autre aux élèves qui ont montré une certaine maîtrise (ou compréhension) de la résolution des problèmes de partage inéquitable par dessin.
But	Amener les élèves vers le symbolisme algébrique conventionnel.
Théorème-en-acte	Les élèves qui maîtrisent le système de représentation intermédiaire sont prêts à remplacer ce système de représentation par le langage littéral de l'algèbre.

Ce schème renforce le fait que l'enseignante croit que le raisonnement sur les parts ainsi que sur la représentation symbolique sont les éléments clés dans ce type de problème. En effet, lors du retour réflexif, l'enseignante nous mentionne qu'elle a abordé l'algèbre explicite avec les élèves qui maîtrisaient le système de représentation et qui avaient réussi plus de problèmes que les autres:

---

[29] Une capture de la schématisation du problème 1 par l'enseignante en classe a été place à l'annexe F.

> Enseignante: […] Puis j'avais même commencé à aborder le sujet avec certains qui étaient rendus plus loin que, à place de faire un cercle qu'est-ce qu'on pourrait faire. Comme…
> Lili: Mettre un X ou…
>
> Enseignante: Mettre un X, c'est ça. Ceux qui étaient plus forts là. J'avais commencé de parler de ça un petit peu.

Ainsi, pour l'enseignante, pour pouvoir comprendre l'utilité du langage littéral de l'algèbre dans la résolution de problèmes écrits, les élèves doivent raisonner en termes de parts, de les représenter en utilisant un mode de représentations personnel et d'opérer sur ces représentations afin de résoudre le problème. Elle a donc complètement intégré les conditions du raisonnement analytique qui consiste à considérer l'inconnue, la représenter et opérer sur cette dernière.

Nous avons également pu remarquer que l'enseignante a trouvé une nouvelle utilité à la ressource qui n'était pas prévue au départ. En effet, ne voulant pas déroger de son enseignement habituel, elle avait déjà introduit en classe le langage algébrique et les transformations algébriques avant la résolution de problèmes. Gabrielle trouve que le fait de voir la résolution de problèmes après aide à donner du sens au symbolisme tout récemment appris.

> Mais en tout cas, je trouve que ça aide à faire plus le lien si tu l'as déjà vu, s'ils sont déjà capables un peu, algébriquement. […] Je serais ouverte à l'essayer au début, mais, en y pensant comme il faut, je pense que c'est bien de l'avoir fait en deuxième partie. Au début de la résolution de problèmes, mais après avoir fait la partie plus vocabulaire puis manipulation d'expressions seulement.

Le sixième schème de Gabrielle est développé dans le tableau suivant:

Tableau 10

Schème 6 (G6) – Arsène Ponton vise le développement de la pensée algébrique en faisant travailler le sens de la lettre inconnue.

Règle d'action	Lors de la résolution de la tâche Arsène Ponton, amener les élèves à raisonner en termes de parts, à recourir à un registre de représentation intermédiaire et à passer au registre algébrique conventionnel dans la résolution du dernier problème.

But	Travailler le sens de la lettre inconnue
Théorème-en-acte	Arsène Ponton vise le développement de la pensée algébrique en faisant travailler le sens de la lettre inconnue.

Au final, nous pouvons conclure que l'enseignante est tout à fait en accord avec la formation qu'elle a reçue sur la tâche Arsène Ponton. En effet, lorsque nous lui avons demandé si elle trouvait que l'activité visait le développement de la pensée algébrique, voici ce qu'elle a répondu:

> Ben moi je trouve que c'est de la pensée algébrique quand même. De dire qu'il y a l'idée de parts puis d'inconnues. Je trouve que oui, dans un certain sens, ça amène vers ça. C'est comme une autre branche de l'algèbre. Tu as la généralisation, mais tu as aussi la valeur inconnue. C'est ce bout-là. Ça reste de l'algèbre quand même je trouve. Moi je trouve que oui.

Voici donc un tableau résumé des schèmes de Gabrielle à propos de la ressource:

Tableau 11

Résumé des schèmes en construction de Gabrielle

Schèmes en construction	**Description**
Schème 1 (G1)	Arsène Ponton doit être présenté après la manipulation d'expressions algébriques et avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique.
Schème 2 (G2)	Les élèves peuvent résoudre les problèmes de la tâche Arsène Ponton sans l'algèbre explicite et de le faire comme ils le veulent favorise leur engagement
Schème 3 (G3)	Le raisonnement en termes de parts dans les problèmes de partage inéquitable favorise la compréhension.
Schème 4 (G4)	La représentation des parts par un dessin favorise la représentation des relations.
Schème 5 (G5)	La maîtrise du système de représentation intermédiaire indique que le passage au langage littéral de l'algèbre peut être provoqué.
Schème 6 (G6)	Arsène Ponton vise le développement de la pensée algébrique en faisant travailler le sens de la lettre inconnue.

2.2 Cas de l'enseignant Joël

Le tableau suivant est une synthèse du premier schème construit par Joël:

Tableau 12

Schème 1 (J1) – Arsène Ponton doit être présenté avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique.

Règle d'action	Proposer la tâche Arsène Ponton aux élèves après la manipulation d'expressions algébriques et avant la résolution de problèmes écrits
But	Montrer la pertinence du traitement algébrique dans les problèmes écrits
Théorème-en-acte	La tâche d'Arsène Ponton dévoile le potentiel du traitement algébrique dans la résolution de problèmes écrits.

Joël est également un enseignant de deuxième année du premier cycle du secondaire. Comme Gabrielle, il ne fait partie du groupe de travail que depuis cette année. Il a expérimenté une autre activité avant Arsène Ponton et c'était *Le restaurant de Marcel* (Annexe D) pour introduire la généralisation. Il a expérimenté la tâche Arsène Ponton pour la première fois avec ses quatre groupes en novembre 2015. Avec ses élèves, il avait vu la généralisation et les termes et les manipulations d'expressions algébriques. Comme c'était le cas pour Gabrielle, la tâche Arsène Ponton a été présentée avant de voir la résolution de problèmes écrits. Pour cet enseignant, la situation ne pouvait pas être présentée ailleurs qu'à ce moment dans la séquence d'enseignement: « Vraiment rentrer dans l'optique de résoudre des problèmes. C'était des problèmes et on voulait s'en servir pour résoudre des problèmes. Je ne le vois pas ailleurs. Ça va perdre son sens. » Selon cet enseignant, la tâche Arsène Ponton prend donc tout son sens si la résolution de problèmes écrits à l'aide du langage algébrique est vue par la suite avec les élèves. Contrairement à ce qu'il faisait les années précédentes, c'est-à-dire d'enseigner les résolutions d'équations formellement pour ensuite résoudre ces équations dans des problèmes écrits. Joel a commencé par présenter des problèmes écrits simples à résoudre pour intégrer la résolution d'équations. Il a modifié sa séquence d'enseignement en intégrant la résolution de problèmes écrits et la résolution d'équations simultanément. Il présentait donc un type de problème et abordait le type d'équations qu'il impliquait.

> Moi c'est la première fois je le faisais, rentrer ma résolution d'équations par des problèmes. Généralement, j'apprenais les manipulations d'opérations contraires, de la balance, très formel. Cette année, j'ai changé ma façon de faire en abordant, par la résolution de problèmes, les manipulations d'équations. Donc là, ça intervenait super bien.

Le prochain schème est synthétisé dans le tableau suivant:

Tableau 13

Schème 2 (J2) – La résolution de la séquence des problèmes de la tâche d'Arsène Ponton crée le besoin du traitement algébrique et représente un défi pour les élèves.

Règle d'action	Demander aux élèves de résoudre les cinq problèmes de la tâche Arsène Ponton dans l'ordre sans l'algèbre explicite
But 1	Créer le besoin de recourir au langage explicite de l'algèbre
Théorème-en-acte1	La résolution de la séquence de problèmes de la tâche Arsène Ponton aide à montrer la pertinence du traitement algébrique.
But 2	Engager les élèves dans la tâche en leur montrant qu'ils sont capables de résoudre des problèmes en lien avec l'algèbre
Théorème-en-acte 2	La résolution de la séquence de problèmes de la tâche Arsène Ponton représente un défi pour les élèves.

Lors de la présentation de la tâche aux élèves, l'enseignant dit aux élèves qu'ils sont classés en ordre de difficulté croissante: « Mais l'ordre était surtout suggéré par le fait qu'en présentant la tâche, j'expliquais qu'il y avait comme une gradation au niveau de la difficulté. Donc, ils étaient mieux de partir du premier vers le cinquième. » Ainsi, pour Joel, l'ordre des problèmes est important étant donné la gradation de la difficulté.

L'activité en classe Arsène Ponton était un moyen de créer le besoin du traitement algébrique dans les problèmes écrits. En effet, pour Joël, le but de l'activité était de leur montrer qu'à partir d'un moment, l'arithmétique ne nous donne pas les moyens suffisants pour résoudre tous les types de problèmes. C'était de voir l'utilité de l'algèbre ainsi que de voir que c'est un bon outil de résolution de problèmes:

> Pour leur démontrer à quel point un moment donné la démarche arithmétique a ses limites à un certain niveau, que rendu à un certain niveau, ils n'étaient plus capables de les faire. Juste par leur propre moyen. Là l'algèbre pouvait être justement l'outil qui allait les dépanner, leur permettre de se rendre jusqu'au bout de ces types de problèmes-là. C'était un petit peu pour qu'ils frappent un mur, qu'ils voient l'utilité de l'algèbre au travers, comme un outil de résolution de problèmes. C'est vraiment comme ça que je l'ai vu.

Ainsi, à partir d'un certain moment, l'élève devait ne plus être capable de résoudre les problèmes à l'aide des outils qu'il a pour sentir le besoin d'adopter un nouvel outil de résolution. D'ailleurs, l'enseignant croit qu'il n'est pas nécessaire de se rendre jusqu'au problème 5 pour atteindre ce but. En effet, tant que les élèves arrivaient au moment où ils ne sont plus capables de résoudre le problème et sont curieux de connaître une méthode de résolution plus efficace, l'objectif était atteint. L'enseignant leur a donc présenté Arsène Ponton comme un défi: « Ça été lancé beaucoup plus comme un défi que je leur donnais, d'être capable d'en faire le plus possible. » Par contre, malgré la curiosité que l'expérience amène, suite à l'expérimentation, Joël se demande à quel point les élèves vont utiliser la méthode algébrique lorsqu'ils vont la connaître:

> « Au niveau de l'utilisation de l'algèbre, j'ai un peu de misère. J'ai hâte de voir plus tard, une fois qu'ils vont la connaître jusqu'à quel point ils vont accepter de l'utiliser. Ce que je sens, c'est que ça donne une ouverture à écouter une nouvelle méthode de résolution. Donc de les ouvrir un peu justement à la méthode algébrique »

Cette curiosité de la part des élèves s'est manifestée tout au long de l'activité. En effet, selon l'enseignant, il y a eu un engagement surprenant de la part des élèves malgré le fait qu'ils savaient que l'activité était en lien avec l'algèbre. Joel aurait cru que cela les aurait freinés un peu puisqu'ils se font dire par leur entourage que l'algèbre est difficile. Par contre, suite à l'expérimentation, l'enseignant croit que le fait qu'ils aient réussi à résoudre quelques problèmes en lien avec l'algèbre les a motivés. Les élèves étaient curieux de voir ce que l'algèbre pouvait leur apporter:

> Je dirais que ce qui m'a surpris un peu, c'est vraiment l'aspect qu'ils ont embarqué rapidement. Ce n'était pas caché que c'était pour faire un but avec l'algèbre. Dans l'entrée de jeu, je mentionnais qu'on allait passer à la deuxième partie de l'algèbre qui était la résolution. […] Je pense qu'ils ont accepté d'embarquer dans ce challenge-là, ce qui est un petit peu surprenant. […] Moi, ce que j'ai aimé, c'est que ça ouvert la curiosité de l'élève. […]. Là, pour la première fois, j'ai comme pas eu l'impression d'avoir une classe au cours suivant qui était comme: Satan! C'était: c'est correct, c'est bon. On est comme curieux de voir jusqu'où ça va nous amener. »

Le tableau 14 nous présente le troisième schème de Joel:

Tableau 14

Schème 3 (J3) – Le raisonnement en termes de parts amène les élèves vers le langage algébrique.

Règle d'action	Amener les élèves à raisonner en termes de parts
But	Faire comprendre aux élèves l'utilité du langage algébrique
Théorème-en-acte	Raisonner en termes de parts aide à comprendre l'utilité du langage algébrique

Il ressort des propos de l'enseignant lors du focus groupe que les élèves ont produit des raisonnements par parts lors de la résolution des problèmes de la tâche Arsène Ponton. Par contre, nous n'avons aucune trace si ces raisonnements ont été provoqués par l'enseignant ou s'ils ont émergé naturellement. Par les propos de l'enseignant lors du focus groupe, nous pouvons comprendre qu'il considère que les raisonnements en termes de parts produits par les élèves sont de même nature que des raisonnements algébriques bien que les lettres n'étaient pas présentes. En effet, en voyant qu'ils faisaient des paquets, il s'est dit qu'il pourrait réutiliser leur raisonnement pour intégrer le langage algébrique:

> « Joel: […] On le voit pareil que pour ceux qui avaient les bonnes réponses souvent, il y avait quand même un raisonnement en arrière qui était sous-entendu. Plus tard, on va être capable de faire un lien avec leur raisonnement

> qui était arithmétique, mais qui en réalité est aussi basé sur une méthode algébrique. C'est exactement, pour la plupart, la même solution qu'ils ont prise.
> Lili: Ben oui parce qu'ils fonctionnaient en parts et en surplus.
> Joel: C'est ça. On va être capable de faire le lien entre leur raisonnement au départ qui était arithmétique et la représentation algébrique de ces éléments-là puis les opérations qu'ils ont faites. »

Selon cet échange, les données sont-elles suffisantes pour conclure que, pour l'enseignant, le raisonnement sur les parts est de nature analytique ? C'est la conseillère pédagogique qui amène l'idée des parts et des surplus dans la conversation. La nature du raisonnement par parts pour l'enseignant n'est pas claire. Il parle d'un raisonnement arithmétique qui pourra être réutilisé en algèbre. Nous croyons que, pour Joel, un raisonnement est algébrique lorsqu'il y a présence de lettres, soit lorsque le registre de représentation est le langage littéral de l'algèbre. Sinon, il interprète le raisonnement d'arithmétique. Pour lui donc, les raisonnements en termes de parts sans utilisation des lettres sont arithmétiques. Cependant, lorsqu'il dit que ces raisonnements sont basés sur des raisonnements algébriques, il veut probablement dire que ce sont des raisonnements de nature analytique, c'est-à-dire que l'élève représente les inconnues et opère sur elles; comme on le ferait lorsque les inconnues sont représentées par des lettres. Cette vision est en concordance avec la vision du développement de la pensée algébrique du programme québécois qui veut favoriser la transition arithmétique/algèbre. Dans ce cas-ci, les élèves devaient donc travailler en termes de surplus et de parts pour raisonner algébriquement. Joel nous mentionne d'ailleurs comment il intègrera le langage algébrique à partir des raisonnements ressortis dans Arsène Ponton:

> «Du problème 1, bon j'ai un paquet, deux paquets, je veux les mettre ensemble puis ça me fait un tout. Avec des représentations générales. Des x. Au lieu de mettre des paquets, on va mettre x, 2x plus 3x me donne 5x pour mon total. Qu'est-ce que je fais si j'en veux juste un? Je vais diviser.»

Ainsi, nous pouvons comprendre que l'enseignant considère que si les élèves ont raisonné sur les parts en faisant des paquets, il sera plus facile de comprendre l'utilité de la représentation algébrique conventionnelle. Le tableau suivant nous presente le schème sur la representation des parts développé par Joel:

Tableau 15

Schème 4 (J4) – Représentation des parts aide à la compréhension des problèmes

Règle d'action	Représenter les parts par des bulles et des flèches
But	Amener les élèves à faire des schémas pour représenter les parts dans les problèmes pour mieux comprendre le problème
Théorème-en-acte	Les représentations visuelles des parts aident à comprendre le problème

Suite à l'expérimentation, l'enseignant a été surpris par le peu d'élèves qui ont utilisé les représentations personnelles (schémas, dessins, etc.) pour représenter ces parts:

> Je m'attendais à ce qu'ils fassent plus de dessin aussi, de représentation. Ce que je n'ai pas vu beaucoup. […] Là, quand je leur ai proposé d'utiliser le dessin, ça n'a pas été systématique. Ils faisaient très peu de représentation d'égalité entre les choses. Ça c'est un élément que je suis resté bête, malgré que ça ait été proposé en entrée de jeu. […] La relation entre les deux, le principe de dire: « Marie égal Chantal plus 9000 », de se le mettre quand même en mots. Je m'attendais à ce qu'il y en ait plus qui le fassent. Ça n'a pas été le cas.

Il semble donc trouver que la représentation est importante puisqu'il a intégré les paquets pour aider les élèves à comprendre les problèmes. Pour représenter la situation, il utilisait les bulles pour représenter les parts de chacune des nièces et des flèches pour représenter les relations entre celles-ci: « C'est ça, j'ai intégré les bulles aussi au travers de ça. Ça, c'est un élément que je suis content. J'ai l'impression que je vais peut-être…tu sais, là je l'ai mis informel au début en le faisant. Je vais l'intégrer un petit peu plus, même dans la résolution, cette année, c'est quelque chose que je vais essayer de représenter. » Il veut donc essayer de garder la représentation qui est plus « parlante » pour les élèves pour intégrer la représentation algébrique et les opérations sur les expressions algébriques. Non seulement d'utiliser la représentation, mais aussi d'opérer sur cette représentation et de faire le lien avec la résolution d'équations algébriques. L'enseignant semble donc considérer que le raisonnement analytique est important dans ces problèmes puisqu'il s'agit de considérer l'inconnue, de la représenter et d'opérer sur cette représentation.

Nous n'avons pas considéré les prochains éléments comme des schèmes en construction puisque nous avons peu de données et qu'il aurait fallu que ces éléments se manifestent sur une plus longue période de temps. Lors de l'expérimentation avec ses groupes, Joel a décidé de changer l'ordre des problèmes qui était proposé au départ. En effet, il s'est rendu compte, avec ses trois premiers groupes, que le problème 2 semblait plus facile que le premier:

> « Ça semblait être plus facile pour eux autres, comme on dit dans le jargon, de « travailler par paquets », de séparer en paquets. Une part, deux parts, trois parts au total puis de séparer comme ça. Le deuxième étant de cette structure-là, il y en a qui ont eu plus de facilité avec le deux que le un. »

En effet, comme nous l'avons vu précédemment, le deuxième problème contenait une seule relation multiplicative. L'élève pouvait donc seulement raisonner sur un certain nombre de parts égales et trouver le montant d'argent pour une seule part. Par contre, pour le premier problème, en plus de raisonner sur les parts, l'élève devait tenir compte du surplus qu'une des nièces obtiendra par rapport à l'autre. Voyant que c'était moins évident pour les élèves, l'enseignant a décidé, pour le quatrième groupe, de dire aux élèves de commencer par le deuxième problème:

> « Donc, un moment donné avec le premier, on s'est aperçu qu'avec l'ordre 1 et 2, le 1 créait plus de problèmes. Les élèves sautaient comme quasiment en 2 tout de suite. Le 2 semblait être plus facile. Donc, dans l'autre cas, j'ai comme suggéré de commencer par le deux avant de faire le un peut-être pour se donner une confiance et ainsi de suite. Mais tu sais, je l'ai pas changé sur la version papier. »

De façon plus générale, lors du retour réflexif et du retour en groupe avec les autres enseignants, Joel nous mentionne qu'il sait que la tâche Arsène Ponton ne fait pas travailler la pensée algébrique comme la généralisation le fait:

> « Je pense qu'on n'a rien à voir avec le début qui est la généralisation de l'algèbre. Elle intervient au moment où on veut se servir de l'algèbre comme outil de résolution de problèmes. Elle n'est pas là pour généraliser dans le contexte. Arsène Ponton n'est pas là pour une généralisation. »

L'enseignant comprend donc que l'élève n'a pas à généraliser pour résoudre les cinq problèmes. On pourrait penser qu'il pense que la tâche fait travailler la pensée algébrique d'une autre façon, en faisant travailler le sens de la lettre inconnue par exemple, mais un autre passage nous met en doute lorsque nous lui demandons si cette tâche vise le développement de la pensée algébrique:

> La pensée algébrique, je trouve que ce n'est pas son objectif à celle-là. C'est plus les activités de généralisation qui vont le faire que celle-là. Celle-là est vraiment là pour toucher plus comme outil de résolution que de pensée à mon avis. Arsène Ponton est présenté vraiment comme un problème où tu as à trouver des parts. Donc, c'est vraiment un problème écrit et non pas de quoi qui va être beaucoup plus général. Tu sais, on cherche une réponse. On ne cherche pas aucune généralisation ici. Pour moi je ne suis pas sûr que ce soit de la généralisation.

Par cette citation, on peut déduire que l'enseignant croit que la pensée algébrique se développe essentiellement par la généralisation. Il trouve que la tâche Arsène Ponton offre les outils nécessaires pour la résolution de problèmes écrits en montrant la pertinence d'utiliser le langage algébrique conventionnel, mais comme elle ne fait pas généraliser les élèves, elle ne vise pas à développer la pensée algébrique. L'activité a été expérimentée en novembre 2015, c'est-à-dire quelques mois après le début de sa participation au groupe de travail. Au début, la formation insiste beaucoup sur l'approche par généralisation parce que les formatrices pensent que c'est par cette approche que l'enseignant devrait initier le développement de la pensée algébrique. Il serait donc possible que l'enseignant n'aie pas complètement intégré la formation des didacticiennes en ce qui concerne les différentes approches pour développer la pensée algébrique.

Finalement, voici un tableau qui rassemble les schèmes en construction de Joel:

Tableau 16

Résumé des schèmes en construction de Joel

Schèmes en construction	**Description**
Schème 1 (J1)	Arsène Ponton doit être présenté après la manipulation d'expressions algébriques et avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique.
Schème 2 (J2)	La résolution de la séquence des problèmes de la tâche Arsène Ponton crée le besoin du traitement algébrique et représente un défi pour les élèves.
Schème 3 (J3)	Le raisonnement en termes de parts amène les élèves vers le langage algébrique.
Schème 4 (J4)	Représentation des parts aide à la compréhension des problèmes

2.3 Cas de l'enseignant Michel

Tableau 17

Schème 1 (M1) – La tâche Arsène Ponton doit être présentée après la manipulation d'expressions algébriques et avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique.

Règle d'action	Proposer la tâche Arsène Ponton aux élèves après la manipulation d'expressions algébriques et au début de la résolution de problèmes écrits
But 1	Montrer la pertinence du traitement algébrique dans les problèmes écrits.
Théorème-en-acte	La tâche d'Arsène Ponton fait émerger la nécessité du traitement algébrique dans la résolution de problèmes écrits.

Michel est également un enseignant de deuxième année du premier cycle du secondaire. C'est sa première année de collaboration dans le groupe de travail. La tâche Arsène Ponton était la première activité qu'il expérimentait en lien avec le groupe de travail. Il ne se sentait donc pas du tout à l'aise à modifier la tâche que les formatrices avaient présentée. Il a ainsi présenté la feuille d'activité Arsène Ponton telle quelle à ses élèves. D'ailleurs, il a expérimenté la tâche avec un seul de ses groupes puisqu'il a senti une certaine réticence à participer à la recherche lorsqu'il en a parlé avec ce groupe. Avec ses élèves, comme les autres enseignants, il avait déjà vu les termes algébriques et les manipulations d'expressions algébriques. Par contre, il avait déjà commencé à voir la résolution de problèmes à l'aide du langage algébrique conventionnel.

Selon lui, le but de présenter la tâche d'Arsène Ponton à ses élèves serait de leur montrer la pertinence du traitement algébrique lors de la résolution de problèmes écrits. À partir d'un moment dans les problèmes « algébriques », il est plus efficace d'utiliser le langage algébrique conventionnel:

> Puis le but premier de donner cette tâche-là, c'était de leur montrer qu'il y avait des numéros où tu avais besoin de l'algèbre. Tu ne pouvais pas le réfléchir comme tu pouvais réfléchir un problème algébrique qui est de base. Donc, il y a des niveaux où, un moment donné, tu ne peux plus, tu as besoin d'aller chercher l'algèbre. C'est le moyen pour pouvoir aller chercher tes réponses. Le but c'était de faire réaliser aux élèves le pourquoi de l'algèbre. Dans tel genre de problèmes, tu es mieux d'y aller avec l'algèbre que d'y aller avec essais-erreur. C'est la façon peut-être la plus longue, la moins efficace, la moins efficiente. Donc, c'était dans ce but-là.

L'enseignant essaie donc de montrer à ses élèves que la méthode essais-erreurs est donc la moins efficace pour résoudre ces problèmes et, du même coup, montrer la pertinence de représenter les inconnues par le langage algébrique et d'opérer sur ces représentations. Le problème 5, à la suite des autres problèmes, aide à atteindre ce but.

> « Un moment donné, j'ai trouvé ça bien qu'ils ne soient pas capables de faire la question numéro 5, parce que, pour certains qui sont un petit peu plus à l'aise puis un petit peu plus confiant en mathématique, ben ils se disent: oups, j'ai peut-être quelque chose à apprendre par rapport à l'algèbre. »

Les élèves « forts » comprennent donc qu'ils ont quelque chose à apprendre et veulent connaître le moyen de traiter ces problèmes « impossibles à résoudre ». Par le manque de données, nous ne savons pas ce que pense l'enseignant sur les raisonnements sur les parts. Nous ne savons pas s'il considère ces raisonnements sur les parts comme des raisonnements arithmétiques qui n'ont aucun lien avec l'algèbre. Il est possible que ces élèves n'aient pas fait ressortir des raisonnements sur les parts et qu'il n'ait pas eu l'occasion de faire le lien avec la représentation avec le langage algébrique conventionnel. Michel nous mentionne d'ailleurs que le problème 1 a été résolu principalement « de façon arithmétique »:

> À mon souvenir, j'ai dû amener justement le pourquoi. Il n'y a pas d'élèves qui m'ont sorti une démarche puis une autre très différente pour dire que y'en a un qui a utilisé l'algèbre. Il ne me semble pas que j'ai vu ça vraiment, que c'était frappant. Fait que j'ai dû amener le pourquoi. Le premier problème, la plupart des équipes l'avaient fait de façon arithmétique. Ça m'a surpris parce que j'avais commencé à voir un petit peu la méthode de résolution de problèmes en algèbre.

Lorsque l'enseignant nous parle du « pourquoi », nous pensons qu'il veut dire de la pertinence du traitement algébrique dans les problèmes écrits. Michel mentionne qu'aucun élève n'a utilisé l'algèbre pour résoudre les problèmes. Nous pensons qu'il voulait parler de l'usage des lettres pour représenter les inconnues. En effet, il serait surprenant que les élèves aient tous utilisé la méthode essais-erreurs, à moins qu'ils y soient habitués en classe. Il y a donc probablement des élèves qui ont raisonné en termes de parts dans le premier numéro en soustrayant le surplus et en divisant le restant en deux. Nous ne savons donc pas ce qu'il a fait des raisonnements sur les parts ressortis par les élèves. De plus, nous ne savons pas s'il considère ce raisonnement sur les parts comme un raisonnement analytique qui est le même que lors du traitement algébrique du problème. Il est possible que l'enseignant ait simplement voulu montrer aux élèves que la méthode d'essais-erreurs n'était pas la plus efficace et qu'ils avaient besoin d'un moyen plus efficace de résoudre les problèmes écrits. Ceci nous a amenés à formuler le premier schème en construction de cet enseignant:

Michel est d'ailleurs d'avis que la tâche Arsène Ponton doit directement être présentée avant la résolution de problèmes écrits à l'aide du langage algébrique conventionnel. En effet, selon lui, peu importe si l'algèbre est introduite plus formellement avant la résolution de problèmes ou par la suite, la tâche prend tout son sens si elle est présentée tout juste avant la résolution de problèmes:

> « C'est plus de dire: le coller à la résolution de problèmes. La résolution de problèmes, comme toi tu as fait, ta porte d'entrée, c'était la résolution de problèmes. Avec ça, tu as vu la résolution d'équations. Peu importe quelle porte d'entrée tu vas prendre pour l'algèbre, tu peux commencer par la résolution de problèmes autant que tu peux commencer par 2n avec 3n, qu'est-ce que ça fait ensemble? Ou qu'est-ce que c'est un coefficient, puis qu'est-ce que c'est une variable? Tout ça pour dire que je trouve que le fait de coller cette activité-là à la résolution de problèmes, le plus proche possible, ça prend tout son sens pour l'élève. C'est plus dans cette optique-là que les préalables avant. »

En discutant avec les autres enseignants lors du focus groupe, Michel s'est rendu compte que peu d'élèves s'étaient rendu jusqu'au problème 5 dans les groupes qui ont expérimenté la tâche Arsène Ponton. Par contre, lui aussi a remarqué, comme les deux autres enseignants, que de montrer aux élèves qu'ils sont capables de faire des problèmes en lien avec l'algèbre apportait un engagement de la part des élèves. Ainsi, il propose l'idée d'ajouter des problèmes plus faciles avant le problème 1 pour donner un élan aux élèves en difficulté:

> « Je réfléchis tout en entendant d'autres réponses. J'irais même jusqu'à peut-être en ajouter pour permettre à l'élève, qui est un petit peu moins motivé, de voir qu'il est capable d'en faire peut-être deux ou trois. Puis, il est sur sa lancée puis qu'il se donne un petit peu plus la peine de toucher aux autres, même s'il y a un petit peu plus de difficulté. Ça permettrait peut-être à certains élèves de se donner un élan. »

Nous ne pouvons peut-être pas parler ici de schèmes, même en construction, puisqu'il est toujours dans sa réflexion suite à sa première expérimentation. Le tableau 17 nous présente un résumé du schème en construction de Michel.

Tableau 18
Résumé du schème en construction de Michel

Schèmes en construction	**Description**
Schème 1 (M1)	La tâche Arsène Ponton doit être présentée après la manipulation d'expressions algébriques et avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique.

CHAPITRE 5: INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS ET DISCUSSION

Nous allons maintenant, à partir des résultats de recherche présentés, faire le lien avec l'objectif de recherche qui est de documenter les transformations que subit la ressource Arsène Ponton en lien avec le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits utilisée par un groupe d'enseignants. Plus précisément, nous voulons, d'une part, identifier et analyser les documents construits par les enseignants, autant la dimension ressource que les schèmes d'usage individuels développés par les enseignants et, d'autre part, décrire les schèmes communautaires du groupe d'enseignants. Pour le premier objectif spécifique, nous avons déjà identifié et fait la différence entre la ressource de formation et la ressource des enseignants. Par la suite, lors de la genèse documentaire, les enseignants ont intégré cette ressource dans leur pratique et ont développé des schèmes d'usage, soit des schèmes d'instrumentation ou d'instrumentalisation. Nous avons donc décrit ces schèmes qui sont toujours en construction pour chacun des enseignants. Dans cette section, nous reviendrons sur chacun de ceux-ci afin de faire le lien avec la ressource pour comprendre si la ressource a ressourcé le travail de l'enseignant ou si c'est l'enseignant qui a enrichi la ressource (processus d'instrumentation et d'instrumentalisation). De plus, nous répondrons au deuxième objectif de recherche qui est de décrire les schèmes communautaires partagés par les enseignants en comparant les schèmes en construction de chacun de ceux-ci.

1. SCHÈMES D'INSTRUMENTATION ET D'INSTRUMENTALISATION

1.1 Schèmes d'instrumentation

Le tableau suivant nous présente les schèmes d'instrumentation des enseignants:

Tableau 19

Schèmes d'instrumentation

1	Schèmes 1 (G1, J1, M1)	La tâche Arsène Ponton doit être présenté avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique

2	Schème 2 (G2)	Les élèves sont capables de résoudre la tâche Arsène Ponton sans l'algèbre et cela peut les engager dans la tâche.
3	Schème 3 (G3)	Dans les problèmes de partage inéquitable, dire explicitement aux élèves de raisonner en termes de parts pour que les élèves comprennent le problème
4	Schème 4 (G4)	Représenter par un dessin les parts pour que l'élève utilise la schématisation pour représenter les relations et pour qu'il opère sur la représentation.
5	Schème 5 (G5)	Pour les élèves qui ont montré une certaine maîtrise (ou compréhension) de la résolution des problèmes de partage inéquitable par dessin, l'enseignante demande aux élèves de rechercher un système de représentation autre afin d'amener les élèves vers le symbolisme algébrique conventionnel.
6	Schème (G6)	La tâche Arsène Ponton vise le développement de la pensée algébrique en faisant travailler le sens de la lettre inconnue.

Pour le premier schème d'instrumentation, nous pensons que c'est probablement le schème qui semble le plus développé par les enseignants. En effet, à plusieurs reprises durant la rencontre focus groupe, les enseignants ont mentionné que l'essentiel de la tâche Arsène Ponton était de créer le besoin du traitement algébrique. Nous pensons que c'est un schème d'instrumentation, car les formatrices ont mentionné que l'approche par résolution de problèmes écrits pour développer la pensée algébrique devrait être un prétexte pour traduire sous forme d'équations algébriques. Ainsi, la tâche Arsène Ponton, par ces cinq différents types de problèmes de partage inéquitable déconnectés, contribue d'une certaine façon à développer ce besoin de traduire sous forme d'équations algébriques. Plus précisément, nous avons pu remarquer, lors de la formation, que les problèmes déconnectés favorisent le raisonnement analytique. C'est ce sur quoi a insisté l'enseignante Gabrielle lors de son expérimentation en travaillant sur les raisonnements sur les parts. Il est difficile de dire si les deux autres enseignants ont eu la même stratégie en classe par le peu d'indices, mais ils ont insisté sur un autre aspect que les formatrices ont présenté. En effet, ces dernières ont introduit le problème 5 dans la séquence de problèmes de la tâche Arsène Ponton, plus complexe à résoudre sans utiliser le langage littéral de l'algèbre pour montrer que le raisonnement sur les parts a ses limites et qu'à un certain moment, nous avons besoin d'un outil de résolution plus efficace. Nous croyons que c'est l'expérience de la formation qui a poussé ces deux enseignants à avoir ce but en tête pour l'activité.

En ce qui concerne le deuxième schème, nous croyons que c'est le fruit d'un processus d'instrumentation également, mais du produit de la transposition de la ressource de formation et de la ressource des enseignants. En effet, les formatrices ont demandé aux enseignants de résoudre les problèmes d'Arsène Ponton sans l'algèbre afin de leur montrer qu'ils sont capables de résoudre ces problèmes « algébriques » grâce au raisonnement analytique, un raisonnement sur les parts et les surplus. Les didacticiennes voulaient leur montrer que le raisonnement analytique est un raisonnement qui peut se faire sans nécessairement utiliser les lettres et donc de développer ce raisonnement analytique avant l'introduction de l'algèbre formelle. C'est ce que les enseignants ont vécu lors de la formation en réussissant à résoudre les problèmes en raisonnant sur les parts sans utiliser les lettres. Ils ont voulu transposer ces connaissances dans leur pratique afin de montrer à leurs élèves qu'ils sont capables de résoudre ces problèmes dits « algébriques ». Ils avaient en tête la motivation de leurs élèves puisque les enseignants savent que l'algèbre est la crainte de leurs élèves. Leur montrer qu'ils ont déjà des connaissances par rapport à l'algèbre était une façon de leur montrer qu'ils sont capables de raisonner algébriquement. C'est ce que les formatrices ont voulu montrer aux enseignants, mais nous voyons la différence entre l'utilisation de la ressource dans le domaine de la formation et de la pratique.

Les schèmes 3, 4 et 5 concernent le développement du raisonnement analytique chez l'élève. L'enseignante Gabrielle leur dit d'abord de raisonner en termes de parts sur les quantités inconnues afin que les élèves comprennent le problème. Par la suite, elle leur fait une représentation des parts avec des bulles et les surplus écrits en chiffre afin que les élèves opèrent sur cette représentation pour résoudre le problème. Pour les élèves qui maîtrisaient le raisonnement sur les parts et qui raisonnaient sur les représentations de celles-ci, Gabrielle a demandé aux élèves par quoi ils pourraient remplacer cette représentation. Elle veut donc remplacer cette représentation par les lettres, que les élèves ont déjà vues lors de la présentation des manipulations d'expressions algébriques. Ces éléments concernent le développement du raisonnement analytique dont les enseignantes ont parlé en formation. En effet, lorsque les formatrices ont fait un retour sur la tâche, elles leur ont montré qu'il est possible de résoudre ces problèmes sans utiliser le langage littéral de l'algèbre et de plutôt raisonner en termes de parts. Nous n'avons pas assez d'éléments pour nous indiquer si les formatrices ont parlé de représentation des parts avec les enseignants, mais, lors de la rencontre avec elles, nous savons que, pour elles, le développement du raisonnement analytique signifie de considérer l'inconnue (raisonner en termes de parts), la représenter et opérer sur cette représentation.

Finalement, nous avons vu que Gabrielle croit que la tâche Arsène Ponton vise le développement de la pensée algébrique en faisant travailler le sens de la lettre inconnue. Elle comprend par contre que l'on travaille un sens de la lettre qui est différent que celui que l'on travaille lors de la généralisation algébrique. Ce schème a clairement été développé suite à la formation pendant laquelle les formatrices ont insisté sur l'importance de viser le développement de la pensée algébrique en travaillant le sens de la lettre inconnue dans la résolution de problèmes écrits de partage inéquitable. C'est donc également un schème d'instrumentation. Pour Joel aussi, la tâche Arsène Ponton fait travailler l'élève d'une façon différente de la généralisation, mais ses propos nous laissent croire qu'il ne pense pas que la tâche vise le développement de la pensée algébrique. Pour lui, la tâche vise vraiment à créer le besoin du traitement algébrique. Nous n'avons pas assez d'indices pour nous prononcer à propos de Michel.

1.2 Schèmes d'instrumentalisation

Tableau 20
Schèmes d'instrumentalisation

Schème 1 (G1, M1, J1)	Arsène Ponton doit être présenté avant la résolution de problèmes écrits et après la manipulation d'expressions algébriques puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique

Comme nous pouvons le remarquer, nous avons peu de schèmes d'instrumentalisation. Nous ferons des hypothèses dans le prochain chapitre quant à cette constatation. Nous avons identifié un seul schème d'instrumentalisation. Contrairement à ce que les formatrices avaient suggéré en formation, les enseignants ont proposé la tâche Arsène Ponton aux élèves après l'introduction de l'algèbre formelle. En effet, selon leur planification générale, ils présentaient les termes algébriques ainsi que les manipulations algébriques pour ensuite introduire la résolution de problèmes écrits. Ne voulant pas déroger de leur planification mais en voulant présenter la tâche Arsène Ponton juste avant la résolution de problèmes écrits, les enseignants n'ont donc pas vu d'autres options que de présenter la tâche entre les deux. Ceci est donc nouveau par rapport à ce qui avait été suggéré en formation puisque la tâche Arsène Ponton servait au départ à créer le besoin du traitement algébrique. Avec les enseignants, c'était toujours le cas, mais les élèves connaissaient déjà les termes algébriques et les manipulations. Les enseignants ne croient pas que cela a eu une influence sur le sens de la tâche, puisque ce n'était pas instinctif pour les élèves d'utiliser l'algèbre pour résoudre les cinq problèmes.

1.3 Schèmes communautaires

Les schèmes communautaires sont regroupés dans le tableau suivant:

Tableau 21

Schèmes communautaires

Schème 1 (G1, J1, M1)	Arsène Ponton doit être présenté avant la résolution de problèmes écrits et après la manipulation d'expressions algébriques puisqu'elle crée le besoin du traitement algébrique
Schème 2 (G2)	Les élèves sont capables de résoudre les problèmes sans utiliser l'algèbre.
Schème 3 (G3, G4, G5, J3, J4)	Le raisonnement en termes de parts est un élément clé dans Arsène Ponton.

Tout d'abord, un schème qui s'est manifesté chez tous les enseignants est que la tâche d'Arsène Ponton crée le besoin du traitement algébrique. En effet, il était clair pour eux qu'à la suite de l'activité, les élèves auraient besoin de traiter algébriquement les problèmes écrits déconnectés. Pour l'enseignante Gabrielle, nous croyons que c'est que le fait de forcer les élèves à raisonner analytiquement dans les problèmes déconnectés qui montre aux élèves la pertinence d'utiliser les lettres pour représenter les inconnues dans les problèmes écrits. Pour les deux autres enseignants, avec ce que nous avons comme indices, nous croyons que c'est le fait de ne plus pouvoir résoudre, à partir d'un certain type de problèmes, à l'aide de méthode arithmétique qui montre aux élèves qu'ils ont besoin d'un nouvel outil de résolution. Il s'agit donc, pour Michel et Joel, de leur faire réaliser qu'ils n'ont pas tous les outils nécessaires pour résoudre les problèmes écrits et de faire naître la curiosité de connaître la méthode algébrique. Comme nous l'avons mentionné quelques fois déjà, pour les trois enseignants, la tâche Arsène Ponton devait être présentée avant la résolution de problèmes écrits puisqu'elle prenait tout son sens. Elle montrait aux élèves qu'ils étaient capables de résoudre des problèmes en lien avec l'algèbre et créait le besoin du traitement algébrique dans les problèmes de partage inéquitable.

Le deuxième schème qui s'est manifesté chez tous les enseignants est que les élèves sont capables de résoudre les problèmes de partage inéquitable sans utiliser le langage algébrique. Gabrielle a demandé à ses élèves de résoudre les problèmes d'Arsène Ponton sans l'algèbre explicite pour leur montrer qu'ils étaient capables de résoudre des problèmes en lien avec l'algèbre et les engager dans la tâche. C'est également le cas de Michel qui envisage même d'ajouter des problèmes dits « plus faciles » à résoudre pour donner confiance à l'élève. Pour Joel également, Arsène Ponton aide à montrer que les élèves sont capables de faire de l'algèbre à partir de ce qu'ils connaissent déjà. Ce schème, que nous avons identifié comme un schème d'instrumentation, montre que l'expérimentation de la tâche lors de la formation a porté fruit puisque les enseignants ont voulu reproduire ce qu'ils avaient vécu en formation.

Tous les schèmes en lien avec le raisonnement sur les parts nous laissent penser que cela pourrait devenir un schème communautaire. En effet, nous avons remarqué des manifestations de ces schèmes chez deux enseignants, mais, par manque de données, peu d'indices nous permettent de nous prononcer sur le raisonnement analytique de l'enseignant Michel. Comme nous l'avons présenté plus haut, ce raisonnement sur les parts est très important pour l'enseignante Gabrielle, puisqu'elle en parle avec les élèves, fait des représentations des parts et pousse plus loin les raisonnements. Ces schèmes se sont également manifestés chez Joel lorsqu'il a identifié les raisonnements en termes de parts de ses élèves qu'il compte réutiliser par la suite lors de l'intégration du langage littéral de l'algèbre. Cela nous laisse donc penser qu'il est revenu sur ces raisonnements analytiques avec ses élèves. Par la suite, il fait même une représentation de ces parts avec des « bulles » et des « flèches », comme il le dit. Il se dit même fier de lui puisqu'il pourra le réutiliser par la suite, probablement pour donner du sens aux opérations sur les expressions algébriques. Lors du focus groupe, il fait le lien entre les parts et la représentation avec le langage littéral de l'algèbre, mais nous n'avons pas d'indices à savoir comment il a fait le lien avec le lien avec les élèves.

2. DISCUSSION

En guise de discussion, notre recherche nous a d'abord permis de prendre conscience de la vigilance que l'on devrait avoir quand nous exploitons des ressources à des fins de formation des enseignants. Comme nous l'avons vu plus haut, nous avons fait la distinction entre la ressource de formation et la ressource de l'enseignante. La ressource de formation est celle qui a été présentée lors de la formation par les deux didacticiennes. Elle est destinée à la formation des enseignants sur le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits. La ressource de l'enseignante est celle que l'enseignante a exploitée en transposant celle de la formation pour sa pratique d'enseignement. Les enjeux de la ressource de formation n'étaient donc pas les mêmes que si elle était destinée aux élèves. Par contre, l'enseignante a repris la tâche telle quelle et l'a présentée à ses élèves. Les formateurs doivent donc être vigilants lorsqu'ils présentent une ressource destinée à la formation et sensibiliser les enseignants à distinguer les enjeux de la formation des enjeux de l'enseignement à des élèves.

Lors de l'expérimentation de la ressource par Gabrielle, cette dernière, comme nous l'avons vu, a décidé de présenter la tâche Arsène Ponton après l'introduction du langage littéral de l'algèbre et avant la résolution de problèmes écrits. Ce choix a été fait, nous semble-t-il pour ne pas bouleverser sa planification initiale. En revanche, après l'expérimentation en classe, Gabrielle semble avoir trouvé des raisons qui justifient son choix. En effet, selon elle l'introduction du langage algébrique avant la présentation d'Arsène Ponton n'a ni nui, ni aidé les élèves puisqu'ils n'ont pas utilisé l'algèbre formelle pour résoudre les problèmes, mais a permis, à certains élèves de donner un sens au symbolisme littéral. L'enseignante reste tout de même ouverte à reprendre cette tâche comme une entrée en algèbre pour créer le besoin du traitement algébrique.

Au fil des analyses, à travers les différents schèmes de Gabrielle, nous avons également pu remarquer que plusieurs étaient le fruit d'un processus d'instrumentation. Peu de schèmes ont été le fruit du processus d'instrumentalisation et nous pensons que cela est dû au fait que la ressource n'a pas été pleinement intégrée dans sa pratique d'enseignement. Gabrielle a expérimenté l'activité en classe, en l'insérant dans sa séquence d'enseignement habituelle sans trop bouleverser cette dernière. L'expérimentation et le retour sur cette expérimentation lui ont permis de prendre conscience du potentiel de la ressource pour son enseignement et l'apprentissage des élèves. Elle pense que la ressource est plus riche que celle qu'elle a présentée aux élèves. Elle semble vouloir reprendre l'expérimentation de la ressource et elle veut que celle-ci change sa pratique. Elle sent qu'il faudrait que l'activité « coule » mieux dans son enseignement pour assurer une cohérence. Par contre, elle n'a pas été à l'aise de bouleverser sa séquence d'enseignement. Il semble ainsi que Gabrielle se questionne, est pris dans une tension entre une pratique d'enseignement naturalisée et une ressource dont l'intégration en enseignement bouleverserait sa pratique.

> Il me semble que j'ai manqué de temps. Par après, je suis comme embarquée dans ma planif que j'avais habituelle. C'est comme si ça été un

> petit temps pour faire cette activité-là, puis je trouve que ça n'a pas assez coulé. Ça n'a pas assez déteint sur le reste de mon enseignement.

Selon les propos des didacticiennes, ce phénomène est complètement normal. Comme ce sont des enseignants qui sont dans leur première année dans le projet de formation, ils expérimentent des ressources, mais ils ne saisissent pas encore tout leur potentiel et ne modifient pas encore leur séquence d'enseignement en conséquence:

> L'année un, c'est: je continue d'enseigner l'algèbre de la manière que je dirais qui est l'approche langage. […] Et ce qu'ils font, c'est pratiquement tous ça la première année. Ils continuent d'enseigner en introduisant avec l'approche langage. Puis ils intègrent des activités qu'on leur propose en y voyant le potentiel, mais en n'osant pas trop. Ils parlent des affaires un peu, mais ils ne sont pas au stade d'embarquer, de dire: ok go on embarque par résolution de problèmes écrits pour introduire l'algèbre ou approche par généralisation. C'est le cas de toutes les personnes qui commencent.

Dans un autre ordre d'idées, la tâche Arsène Ponton qui a été présentée aux élèves par Gabrielle avait deux buts. Le premier consiste à amener les élèves à raisonner de manière analytique en raisonnement sur les parts, sans utiliser le langage algébrique conventionnel. Le second est de les amener à donner du sens au symbolisme algébrique en passant d'abord par un mode de représentation intermédiaire. On plaçait donc sur le même plan le développement du raisonnement analytique chez les élèves et l'introduction du langage littéral de l'algèbre. L'enseignante souhaitait autant provoquer le développement du raisonnement analytique chez les élèves en raisonnant sur les parts que créer le besoin du traitement algébrique en n'ayant plus d'outils pour résoudre le dernier problème. Nous pouvons finalement croire que Gabrielle a compris et intégré les enjeux essentiels de la tâche Arsène Ponton puisqu'elle vise ces deux aspects essentiels lorsqu'elle présente la tâche à ses élèves. On peut le remarquer lorsque l'enseignante insiste sur le raisonnement sur les parts et veut remplacer les dessins représentant les parts par des lettres.

Finalement, lors de notre analyse, nous avons remarqué que la dimension ressource est plus complexe qu'elle n'y paraît. En effet, si nous gardons en tête la définition de la ressource « tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail de l'enseignant », non seulement la tâche Arsène Ponton et les principes didactiques présentés par les didacticiennes lors de la formation sont venus ressourcer le travail de l'enseignante, mais nous pensons que l'expérience de la formation est également un élément à considérer. En effet, les didacticiennes ont présenté la tâche Arsène Ponton aux enseignants et ont discuté avec eux de la tâche, mais elles leur ont également fait vivre l'expérimentation de la tâche lors de la formation. Ainsi, lors de la résolution des problèmes d'Arsène Ponton, les enseignants ont développé des connaissances sur la tâche et ont pu comprendre et intégrer des principes didactiques des formatrices qui n'auraient peut-être pas été compris de la même façon. Par exemple, lorsque les enseignants ont eu à résoudre les problèmes avec la contrainte de ne pas utiliser le langage formel, ils ont réalisé que le raisonnement sur les parts et sur les surplus est un raisonnement analytique et qu'il est possible de le faire sans les lettres. C'est une constatation qui n'aurait peut-être pas été aussi évidente sans avoir fait l'expérience.

Cette citation montre que l'enseignant réorganise son enseignement pour intégrer Arsène Ponton.

> « Puis le réutiliser, moi j'aurais tendance, par la suite, à vouloir le réutiliser quand je vois un petit peu mes modèles d'équation. Mes types d'équations un peu avec eux tout au long du chapitre. Par exemple. Le modèle au départ, on fonctionne juste avec de la multiplication. Coefficient ou termes semblables qu'on additionne, juste des termes en x, après ça avec des termes constants. Je pense que je viendrais chercher chacun des numéros puis je viendrais repartir un peu: Hey! Tu te souviens d'Arsène Ponton? Tel numéro? Bon maintenant avec notre algèbre, comment on le ferait celui-là algébriquement? Tu sais, venir le rechercher dans ce sens-là tout le temps de même jusqu'au cinquième qui est une égalité avec des x des deux côtés. C'est de même que je viendrais le réutiliser par la suite, le réinvestir, peut-être. »

CONCLUSION GÉNÉRALE

En conclusion, pourquoi avons-nous étudié l'intégration d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique dans la pratique d'enseignants? Tout d'abord, comme nous l'avons exposé dans la problématique, une nouvelle perspective de l'enseignement de l'algèbre a émergé suite à des préoccupations des acteurs du milieu scolaire et des questionnements des chercheurs. Cette nouvelle perspective propose de « penser autrement » l'enseignement de l'algèbre en visant le développement de la pensée algébrique sans nécessairement l'usage des lettres dès l'école primaire et se nomme *Early Algebra.* Cette dernière est un domaine de recherche, une orientation curriculaire et un domaine de formation des enseignants. Les chercheurs de ce domaine s'intéressent notamment à clarifier ce qu'on entend pas algèbre et par pensée algébrique. Nous avons vu que les acteurs en éducation ont différentes visions de l'algèbre, mais nous nous sommes basés sur celle proposée par Squalli où l'algèbre est présentée comme« ensemble des activités mathématiques faisant intervenir des opérations […] pouvant être de nature quelconque […] mais répétées un nombre fini de fois » (Squalli et al., 2011, p.70) et que la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (Squalli, 2015). Selon les chercheurs, la généralisation et la pensée analytique sont notamment deux composantes essentielles de la pensée algébrique. Grâce à plusieurs recherches empiriques, les chercheurs étudient également la viabilité du développement de la pensée algébrique des élèves du primaire et du secondaire.

Les programmes de formation de nombreux pays ont déjà été influencés par la perspective *Early algebra.* Ainsi aux États-Unis et dans les provinces canadiennes par exemple, le développement de la pensée algébrique est le but de plusieurs activités vécues au primaire. Par contre, les acteurs du milieu de l'éducation se sont rendu compte que ce n'est pas parce que les programmes changent que les pratiques des enseignants changent également. Ainsi, les chercheurs se sont demandé comment serait-il possible de former ces enseignants à avoir des pratiques visant le développement de la pensée algébrique ? Comment serait-il possible de développer des connaissances professionnelles en ce sens ?

Dans notre recherche, nous avons orienté notre recherche sur le travail de l'enseignant dans son ensemble, notamment sur l'intégration des ressources dans sa pratique, vu sous l'angle de l'approche documentaire de Gueudet et Trouche (2008) qui s'inspire de l'approche instrumentale de Rabardel. Pour Gueudet et Trouche, le travail sur les ressources est au cœur du développement professionnel. Lors de l'intégration d'une ressource, un élément non-approprié par l'enseignant qui est susceptible de ressourcer son travail, un processus de genèse documentaire se met en branle où l'enseignant développe des schèmes d'utilisation. Ces schèmes se forment dans un double processus, soit d'instrumentation ou d'instrumentalisation. La combinaison de la ressource et des schèmes d'utilisation qui y sont associés constitue un document. Nous nous sommes basés sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud pour définir ce qu'est un schème: « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données » (Vergnaud, 1996, p. 199). Pour Vergnaud, au fond de l'action, il y a la conceptualisation et les schèmes sont les indicateurs de l'organisation de l'activité.

Dans le cadre de notre projet, des enseignants ont intégré la ressource Arsène Ponton qui consiste en la résolution de problèmes écrits visant le développement de la pensée algébrique. Le raisonnement analytique est souhaité de la part du résolveur, c'est-à-dire d'avoir un raisonnement sur les parts. Nous nous sommes donc intéressée aux schèmes d'utilisation en construction développés par les enseignants lors de l'intégration de cette ressource.

Grâce à des entrevues de groupe et des expérimentations en classe, nous avons obtenu plusieurs données nous permettant de décrire la ressource et les schèmes d'utilisation de chacun des enseignants. Nous nous sommes rapidement rendu compte que ce qui a ressourcé le travail de l'enseignant n'était pas seulement la tâche Arsène Ponton, mais également l'expérience de formation. En effet, lors de cette journée de formation, les enseignants ont discuté avec les didacticiennes, ont reçu plusieurs informations sur le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits et ont vécu l'expérience de résoudre la tâche Arsène Ponton dans les mêmes conditions que leurs élèves, c'est-à-dire sans l'algèbre. Nous croyons que tous ces éléments font partie de la ressource Arsène Ponton dans le cadre de notre projet. Nous avons donc pu énoncer plusieurs principes didactiques que les formatrices ont présentés aux enseignants lors de la formation. Ces principes étaient soit en lien avec la tâche Arsène Ponton ou en lien avec le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits.

Cette journée de formation a donné, selon nous, un bon coup de pouce aux enseignants dans l'intégration de la ressource, contrairement à si les enseignants avaient seulement lu la tâche et l'avaient expérimentée en classe. En effet, nous avons pu remarquer plusieurs schèmes qui étaient le résultat d'un processus d'instrumentation, c'est-à-dire que la ressource a soutenu le travail de l'enseignant. Cette démarche d'accompagnement pour former les enseignants sur le développement de la pensée algébrique nous semble donc un moyen efficace, même s'il n'est pas infaillible. Nous avons également vu qu'il y a eu peu de schèmes d'instrumentalisation, ce qui nous laisse penser que la ressource aurait peut-être pu être plus intégrée dans la pratique des enseignants. Selon les formatrices, c'est un processus qui demande du temps, comme elles ont pu le remarquer lors des trois années de formation. Comme c'était la première année avec le groupe de travail pour les trois enseignants de notre projet, nous croyons qu'il est tout à fait normal que la ressource n'ait pas été complètement intégrée dans leur pratique.

Quelques éléments nous ont empêchés de véritablement atteindre notre but de décrire les documents construits par les enseignants et d'identifier les schèmes communautaires partagés par les enseignants et ceux-ci constituent les limites de notre recherche. Tout d'abord, par des contraintes de temps, nous n'avons pas pu suivre les enseignants sur une longue période de temps. Notre collecte de données s'est déroulée durant quelques mois, mais comme nous l'avons mentionné, nous croyons qu'il aurait été beaucoup plus riche de les suivre sur plusieurs années. Aussi, cela nous a forcée à appeler nos schèmes des schèmes en construction. De plus, pour chacun des enseignants, nous n'avions pas autant de données que nous aurions aimé avoir. Par exemple, nous n'avions que l'enregistrement vidéo de l'expérimentation en classe de l'enseignante Gabrielle, qui s'est avérée très utile pour identifier les schèmes de cette enseignante. Par contre, pour les deux autres enseignants, nous avons dû nous fier aux discours des enseignants lors du retour réflexif et du focus groupe. Il aurait été intéressant de pouvoir également voir leurs actions en classe. D'autre part, dans l'idéal, nous aurions suivi plus de trois enseignants pour que les données en ce qui concerne les schèmes partagés soient plus riches et plus étoffés. Par contre, au moment de trouver des enseignants qui étaient disponibles en même temps pour le focus groupe, qui avaient expérimenté la même ressource visant le développement de la pensée algébrique et qui avaient participé à la même formation, nous n'avons trouvé que trois enseignants.

Nous sommes également consciente que le contexte d'introduction d'algèbre auxquels les enseignants sont soumis dans le groupe de travail, c'est-à-dire une perspective d'un passage plus fluide de l'arithmétique vers l'algèbre en développant la pensée algébrique, est sans cesse en confrontation avec la pratique d'enseignement traditionnel. En effet, cette dernière était ancrée dans une perspective où l'algèbre était introduite par l'initiation au langage et les manipulations algébriques ; des activités de généralisation et de résolution de problèmes étaient présentées par la suite. Intégrer complètement la ressource Arsène Ponton dans un contexte d'enseignement traditionnel ne pouvait donc pas être complètement cohérent. Un travail de réorganisation et de restructuration de la planification annuelle de l'enseignant est implicitement demandé.

Cette présente recherche nous a donc permis d'apprendre davantage sur l'accompagnement des enseignants sur l'intégration d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique. Y aurait-il d'autres moyens aussi efficaces ou complémentaires de former les enseignants en formation continue à viser des pratiques en ce sens ? Serait-il possible de mettre à profit et de partager ces connaissances professionnelles développées lors de ces formations ? Plusieurs questions se posent encore et beaucoup de travail reste à faire sur le développement de la pensée algébrique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problème s de comparaison. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3.* Algérie. Document téléaccessible à l'adresse: <http://emf.unige.ch/files/9514/6401/7893/EMF2015GT3ADIHOU.pdf>.

Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources, apports pour la formation des professeurs de mathématiques. *In* G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. *In* N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). The Netherlands: Klu.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. The Netherlands: Klu.

Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school. *In* V. V. Davydov (dir.), *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (Vol. 6, p. 275–338). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boily, M., Lessard, G., Polotskia, P. et Anwandter-Cuellar, N. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3.* Algérie. Document téléaccessible à l'adresse: <http://emf.unige.ch/files/4514/6401/7905/EMF2015GT3BOILY.pdf>.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK, NFEER-Nelson.

Cai, J. et Knuth, E. (2011). *Early algebraization*. New York: Springer.

Carraher, D.W. et Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *In* F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Vol II.* (p. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Chick, H. et Harris, K. (2007). Grade 5/6 teachers' perceptions of algebra in the primary school curriculum. *Psychology of Mathematics Education*, 31, 2-122.

Cooper, T. J., Williams, A. M. et Baturo, A. R. (1999). Simplifying algebraic expressions, *Proceedings of the 1999 annual conference of the Australian Association for the Research in Education*. Melbourne, 177-184.

Davydov, V. V. (1969/1991). Soviet studies in mathematics education, Vol. 6. *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Demonty, I., Fagnant, A. et Vlassis, J. (2015). Le développement de la pensée algébrique: quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3*. Algérie. Document téléaccessible à l'adresse: <http://emf.unige.ch/files/7514/6401/7971/EMF2015GT3DEMONTY.pdf>.

Falappa, P. (2015). *Le travail d'une enseignante en lien avec le développement du sens du nombre chez les enfants de maternelle au Québec: une étude de cas*. Mémoire de maîtrise. Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada. Faculté d'éducation, Document accessible à l'adresse: <http://savoirs.usherbrooke.ca/bitstream/handle/11143/6741/Falappa_Adriana_Patricia_MA_2015_pdf.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

Filloy, E. et Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). *In* J. Moser (dir.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison: WI.

Fortin, M.-F. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche. Méthodes quantitatives et qualitatives (2e éd.)*. Montréal: Chenelière Éducation (1re éd. 2006).

Freiman, V. et Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equality sign. *In* M. Hoines et A. Fuglestad (dir.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 415-422). Bergen: PME.

Gouvernement de l'Ontario (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année-Mathématiques*. Ontario: Ministère de l'Éducation de l'Ontario.

Gouvernement du Québec (2004) *Programme de formation de l'école québécoise: Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation du Québec. Document téléaccessible à l'adresse: <http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/>.

Gueudet, G. et Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. *In* G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Gueudet, G. et Trouche, L. (2009). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques? *In* I. Bloch et F. Conne. (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 109-133). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et Didactique*, 2(3), 7-34.

Guin, D. et Trouche, L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs: le cédérom SFoDEM 2008. *Repères-IREM*, 72, Document accessible à l'adresse suivante: <http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/>.

Kaput, J., Carraher, D. et Blanton, M. (2008). Algebra in the early grades. *Reference and Research Book News*, *22*(4).

Kaput, J. (1995) A research base supporting long-term algebra reform. In D. T. Owens, M. K. Reed et G. M. MilIaps (dir.) *Proceeding of the Seventeenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathmetical Education* (Vol. 1, p. 71-93). Columbus, OH: The Ohio State University.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C. (1992) The learning and teaching of school algebra. *In* D.A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New-York, NY: Macmillan.

Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3.* Algérie. Document téléaccessible à l'adresse: <http://emf.unige.ch/files/5714/6401/8016/EMF2015GT3LARGUIER.pdf>.

Larose, F. (2014). *La quantification des données qualitatives: Recueil et analyse des données dans une perspective de complémentarité.* Document de cours. Sherbrooke: Université de Sherbrooke, Faculté d'éducation, Activité pédagogique intitulée Méthodes de recherche.

Lee, L. (2002). Le développement de la pensée algébrique au primaire après 40 ans de recherche et d'expérimentation, *In* P. Blouin (dir.), *Actes du Colloque GDM 2002* (p. 59-66). Trois-Rivières.

Lee, L. (1997). La compréhension algébrique: la recherche d'un modèle dans la communauté d'éducation mathématique. Thèse de doctorat, Montréal: Université du Québec à Montréal.

Lenoir, Y. (dir.), Hasni, A., Lacourse, F., Maubant, P. et Zaid, A. (2012). *Guide d'accompagnement de la formation à la recherche. Un outil de réflexion sur les termes et expressions liés à la recherche scientifique.* Longueuil: Groupéditions.

Lins, R.C. (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is. PhD thesis, University of Nottingham. Document téléaccessible à l'adresse: <http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf>.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers. *In* J. Kaput, D. Carraher, et M. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 57-94). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'AMQ,* XXXIX (4),30-42. Document téléaccessible à l'adresse: <>.

Napaphun, V. (2012). Relational thinking: Learning arithmetic in order to promote algebraic thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35(2), 84–101.

National Council of Teachers of Mathematics (1995). *A framework for constructing a vision of algebra.* Draft prepared by the algebra working group of the *National council of Teachers of Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pastré, P. Mayen, P. et Vergnaud, G. (2006). *La didactique professionnelle*. Document téléaccessible à l'adresse: <http://ife.ens-lyon.fr/publications/editionelectronique/revue-francaise-de-pedagogie/RF154-11.pdf>.

Rabardel, P. (1999a). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *In* M. Bailleul (dir.), *Évolution des enseignants de mathématiques ; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (p. 203-213). Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques. Caen: ARDM.

Rabardel, P. (1999b). Le langage comme instrument, éléments pour une théorie instrumentale élargie, *In* Y. Clot, (dir.) *Avec Vygotsky* (p. 241-265), Paris: La Dispute.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3.* Algérie. Document téléaccessible à l'adresse: <http://emf.unige.ch/files/4914/6401/8030/EMF2015GT3RADFORD.pdf>.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257–277.

Radford, L. (2008). *Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts.* ZDM – The International Journal on Mathematics Education.

Radford, L., Bardini, C., et Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 507–530.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. *In* S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (p. 2-21) Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Ruthven, J. (2010). Training needs and preferences of adult public library clients in the use of online resources. *The Australian Library Journal,* 59(3), 108-117.

Schmittau, J. et Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (soumis). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *In* Squalli, H. et Bronner, A. (dir.). *Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel. NCRÉ.*

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 – Groupe travail 3.* Algérie. Document téléaccssible à l'adresse: <http://emf.unige.ch/files/7114/6401/8044/EMF2015GT3SQUALLI.pdf>.

Squalli, H., Suurtaam, C. et Freiman, V. (2013). *Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire*. Rapport du groupe de travail F: 36e rencontre annuelle groupe canadien d'études en didactique des mathématiques. Université Laval, mai 2012.

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. *In* J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.) *Recherches et epertises pour l'enseignement scientifique* (p. 67-78). Bruxelles: De Boeck.

Squalli H., Theis L., Ducharme-Rivard A. et Cotnoir, G. (2007). Finalités et approches d'enseignement apprentissage de l'algèbre dans les manuels du premier cycle du secondaire au Québec. *In Actes du Meeting international « Analyse critique des manuels scolaires de science » organisé par l'International Organisation for Science and Technology Education, en collaboration avec Biology, Health and Environmental Education for better Citizenship et l'Association pour la Recherche en Didactique des Sciences et des Techniques*. Hammamet (Tunisie).

Squalli, H. (2002). Plaidoyer en faveur d'une «algébrisation» des mathématiques de l'école primaire, *In* P. Blouin (dir.), *Actes du Colloque GDM 2002*, (p. 67-73). Trois-Rivières.

Squalli, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Université Laval, Québec, Canada. Récupéré de <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0017/NQ55825.pdf>.

Sutherland, R. (2002) *A comparative study of algebra curricula*. Report prepared for the Qualifications and Curriculum Autority. London: QCA.

Van Dooren, G.G., Su, V., D'Ombrain, M.C. et McFadden, G.I. (2002) *Processing of an apicoplast leader sequence in Plasmodium falciparum and the identification of a putative leader cleavage enzyme.* J Biol Chem 227, 23612-23619.

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. *In* Brun, J. (dir.) *Didactique des mathématiques* (p.197-242). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *In* T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Warren, E. (2009). Early childhood teachers' professional learning in early algebraic thinking: A model that supports new knowledge and pedagogy. *Mathematics Teacher Education and Development*, 10, 30–45.

Wenger, E. (1998) Communities of practice: learning, meaning, and identity. Cambridge University Press.

Wilkie, K.J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(5), 397–428.

Van de Walle, John A. et Lovin, LouAnn H. (2008). *L'enseignement des mathématiques*. Québec: ERPI.

ANNEXE A

PROBLÈME D'ARSÈNE PONTON

Nous avons ici un problème de départ que nous avons complexifié peu à peu. À partir de quelle étape a-t-on besoin de l'algèbre pour le résoudre?

Quelles sont les différences d'une étape à l'autre?

Problème 1: Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000$ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000$, combien recevront Marie et Chantal?

Problème 2: Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 132 000$, combien recevront Marie et Chantal?

Problème 3: Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000$ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème 4: Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème 5: Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal et finalement 43 000$ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?

ANNEXE B

QUESTIONNAIRE DE L'ENTREVUE AVEC LES FORMATEURS/CONCEPTEURS

Introduction:

Ressource: Ensembles des connaissances ainsi que les principes didactiques développées dans la formation pour amener les enseignants à développer chez leurs élèves la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes ainsi que la tâche Arsène Ponton utilisée lors de la formation.

Statut de la tâche:

1. Pourquoi avoir présenté cette tâche aux enseignants? Est-ce un outil pour la formation ou une situation exemplaire pour la pratique?
   a. (*Schème 3: Proposer aux enseignants différents types de problèmes de type partage inéquitable. But: savoir qu'il existe différents types*)
2. Nous avons remarqué que vous avez présenté les problèmes dans un ordre précis. Pourquoi?
   a. (*Schème 1: buts anticipés: Contrecarrer le raisonnement arithmétique, faire émerger le raisonnement analytique, optimiser le raisonnement analytique pour tendre vers un raisonnement algébrique*)
   b. Nous voyons que la difficulté augmente à chaque problème. Pourquoi est-ce que celle-ci augmente selon vous?
3. Pourquoi la tâche est-elle génératrice du raisonnement algébrique?

4. Proposer un problème difficile à résoudre arithmétiquement à la suite d'autres problèmes de comparaison (où la mise en équivalence n'est pas évidente). Dans quel but?

   a. (*Schème 2: but anticipé: Que les élèves comprennent que la résolution arithmétique a ses limites*)

Formation aux enseignants pour la pratique

5. Est-ce que la consigne sur la feuille était la consigne que vous vouliez qu'ils donnent aux élèves? Dans quel but donne-t-on cette consigne aux élèves?
6. Comment est-ce que les enseignants devraient utiliser la ressource?
   Questions pour la relance:

   Quels sont selon vous les enjeux essentiels pour les élèves dans la réalisation de la tâche Arsène Ponton?

   Quels sont selon vous les enjeux essentiels pour les enseignants dans le pilotage de cette la tâche en classe?

7. Selon la rencontre focus-groupe, les enseignants ont utilisé la ressource telle quel en classe. Qu'en pensez-vous?
8. Les enseignants qui font partie de mon échantillon sont arrivés dans le projet en septembre 2015. Comment ont-ils été formés? Qu'est-ce qui les a poussé à essayer l situation d'Arsène Ponton selon vous?

<u>Formation développement de la pensée algébrique</u>

9. Nous avons remarqué que vous considérez que la résolution de problèmes comme une approche visant le développement de la pensée algébrique. Pourquoi est-ce important pour la pensée algébrique?
10. Tous les problèmes d'Arsène Ponton sont des problèmes déconnectés. Pourquoi avoir proposé ce type de problème?
    a. (*Schème 4: Buts anticipés: Mettre à défaut les raisonnements arithmétiques, Raisonner de manière analytique sur l'inconnu*)
11. Dans la rencontre de formation, vous sembliez dire qu'il faudrait présenter ces problèmes de comparaison déconnectés avant l'introduction de l'algèbre formel. Pourquoi?
    a. (*Schème 5: Buts anticipés: Faire émerger le besoin de traduire les relations sous forme d'équations algébriques, que les élèves raisonnent en termes de partage inéquitable*)

12. Dans votre formation, vous avez présenté aux enseignants un ensemble de principes didactiques. Je vais vous lire ces principes, un à la fois, j'aimerais que vous m'expliquiez pour chaque principe, comment l'enseignant doit le concrétiser dans son usage de la ressource Arsène Ponton. Si le principe ne s'applique pas, dites seulement qu'il ne s'applique pas.

- Les élèves qui raisonnent en partage inéquitable n'ont pas plus de difficulté lorsqu'il y a deux types d'opérations.

- Viser le développement de la pensée algébrique nécessite de réfléchir sur l'enseignement de l'arithmétique et sur les objets qui sont partagés entre l'arithmétique et l'algèbre.

- L'enseignant doit réfléchir sur le sens que l'lève donne à la lettre. Le sens de la lettre diffère selon les usages et les tâches demandées (étiquette, inconnue, nombre généralisé, variable et nombre arbitraire).

- Selon si l'élève a un raisonnement arithmétique ou algébrique, le signe d'égalité, une expression et la résolution n'ont pas le même sens.

- L'algèbre commence avant l'arrivée de la lettre avec les raisonnements algébriques en arithmétique.

- Le but de l'enseignant est de faire apprendre à penser mathématiquement.

- Trois processus fondamentaux sont reliés à l'apprentissage de l'algèbre: abstraire, opérer sur l'inconnu et généraliser.

- En algèbre, on distingue difficilement le processus et le résultat.

- Raisonner algébriquement implique un changement de conception sur:
    - Le sens de l'égalité
    - Le sens des expressions algébriques
    - Le sens de la lettre

- Développer la pensée algébrique pour que les élèves aient préliminairement un sens au symbolisme algébrique avant la manipulation.

- En tant qu'enseignants, nous devrions :
    - créer des occasions où plutôt que d'inviter l'élève à «trouver la réponse», on l'encouragera à réfléchir sur les relations numériques qui sous-tendent les calculs.
    - prendre le temps de verbaliser le sens à accoler aux expressions arithmétiques.
    - inciter les élèves à verbaliser en langage naturel les expressions arithmétiques.

ANNEXE C

QUESTIONNAIRE FOCUS GROUPE

1. Présentation de mon parcours/bagage
2. Présentation de mon projet
   - On ne veut pas du tout évaluer leur enseignement
   - Ressource qui vous a été proposé a subit des transformations, car il y a des contraintes de la pratique.
   - Transformations lorsqu'elle est intégrée dans la pratique? (individuelles à chaque enseignant, communes à ceux-ci)
   - Ressource a un double travail
     - Enrichit le travail de l'enseignant
     - L'enseignant enrichit la ressource
3. Expliquer le déroulement de la rencontre
   - Présentation de chacun des membres pour l'enregistrement
   - Périodes de questions en trois moments
   - Enseignants peuvent répondre à tour de rôle
   - Commentaires/Questions/Proposition sur les réponses des autres
4. Formulaires de consentement
5. Enregistrement audio
6. Présentation des membres (nom, niveau et depuis combien de temps dans la communauté) et questions…

<u>Préparation de l'expérimentation</u>

1. Qui a utilisé la situation?
   - Une fois, plus d'une fois
   - Pour ceux qui ne l'ont pas utilisé, pensez-vous l'utiliser? Avez-vous déjà réfléchi à comment vous alliez l'utiliser?

2. La situation vous a été présentée. Elle se présente comme une série de problèmes visant le développement algébrique en lien avec la résolution de problèmes. J'aimerais savoir jusqu'à quel point vous avez modifié la situation. Le but c'est d'avoir des informations le plus précise possible sur le scénario que vous aviez prévu en classe.
    - Est-ce qu'ils ont changé les tâches? Lesquels ? Pourquoi?
    - C'était quoi vos intentions dans cette activité? Qu'est-ce que vous visiez que vos élèves apprennent dans cette situation?
    - Comment ils ont prévu le déroulement en classe? Pédagogique et didactique?
3. Caractéristiques de la classe d'expérimentation
    - Quel niveau?
    - Introduit à l'algèbre?
    - Planification à long terme

Expérimentation

4. Je m'excuse si vous l'avez déjà dit dans le retour réflexif, mais est-ce que le déroulement s'est déroulé comme prévu? Y a-t-il eu des incidents durant la classe?
5. Avez-vous demandé aux élèves de le faire dans l'ordre? Ou ce n'était pas important?
6. Avez-vous été surpris par les élèves? Ont-ils eu des difficultés? Comment êtes-vous intervenus, si vous l'avez fait?
7. Est-ce que la situation a permis d'atteindre ce qu'elle visait? Si pour les mêmes intentions que vous aviez, est-ce que vous reprendriez la même tâche ou vous la changeriez?

8. Pensez-vous que l'ensemble de ces problèmes sont nécessaires? Y a-t-il un intérêt à présenter tous ces types de problème?

Retour sur l'expérimentation

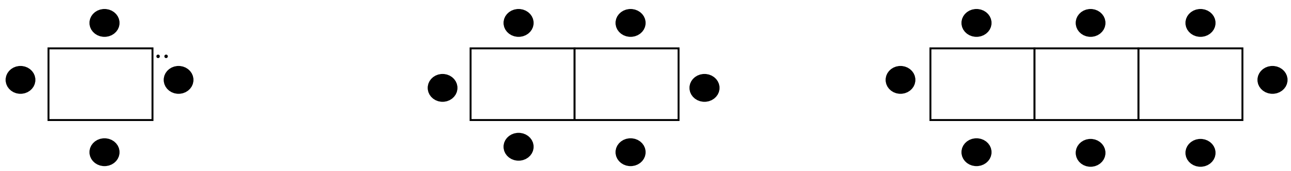
9. Est-ce vous pensez que c'est une ressource que vous pensez réutiliser? Pourquoi?
10. Est-ce que vous apporteriez des changements? Quels types de changement? Tâches? Déroulement? Séquence d'enseignement?
11. Pensez-vous que ce genre de situation a aidé vos élèves à développer la pensée algébrique? Pourquoi?
12. Est-ce qu'ils pensent que cette situation est pertinente avant ou après l'introduction de l'algèbre? Pourquoi?
13. Est-ce que cette situation est nouvelle par rapport `votre enseignement? Qu'est-ce que cette ressource a apporté de nouveau à votre enseignement?
14. Si un collègue voulait l'utiliser, quels conseils donneriez-vous? (Comment gérer la ressource en classe, des modifications que vous feriez)

ANNEXE D

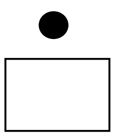
LE RESTAURANT DE MARCEL

Marcel, le propriétaire d'un restaurant, dispose de tables simples dans son restaurant qu'il place l'une à côté de l'autre pour pouvoir placer ses clients lorsqu'ils arrivent; cela forme alors des tablées. Les tablées sont donc toujours formées de la même façon, soit en prenant des tables simples qu'on place côte à côte.

Une table Deux tables Trois tables



Légende:



= client

= table

Marcel aimerait bien trouver une façon de calculer rapidement le nombre de clients qui peuvent s'asseoir autour d'une tablée sans compter les chaises une par une.

A) Complète le tableau suivant:

Nombre de tables					
Nombre de clients					

B) Combien de clients peut-il asseoir autour d'une tablée comportant 9 tables?

C) Combien de clients peut-il asseoir autour d'une tablée comportant 20 tables?

D) Combien de clients peut-il asseoir autour d'une tablée comportant 40 tables?

E) Réponse à la question: « Comment pourrait-il faire pour calculer rapidement le nombre de clients qui peuvent s'asseoir autour d'une tablée sans compter les chaises une par une? »

Production du message(en mots):

Trouver une façon de l'écrire avec des symboles au lieu des mots.

F) Le vendredi soir est une soirée très achalandée dans ce restaurant. Il arrive souvent que des groupes de clients se présentent au restaurant sans faire de réservation. Marcel aimerait trouver une façon de calculer rapidement le nombre de tables qu'il aura besoin pour accueillir le groupe de personnes.

a) Si un groupe de 26 personnes se présentent au restaurant, combien aura-t-il besoin de tables?

b) Si un groupe de 42 personnes se présentent au restaurant, combien aura-t-il besoin de tables?

G) Explique ta façon de faire pour calculer rapidement le nombre de tables qu'il aura besoin pour accueillir le groupe de personnes.

Trouver une façon de l'écrire avec des symboles au lieu des mots.

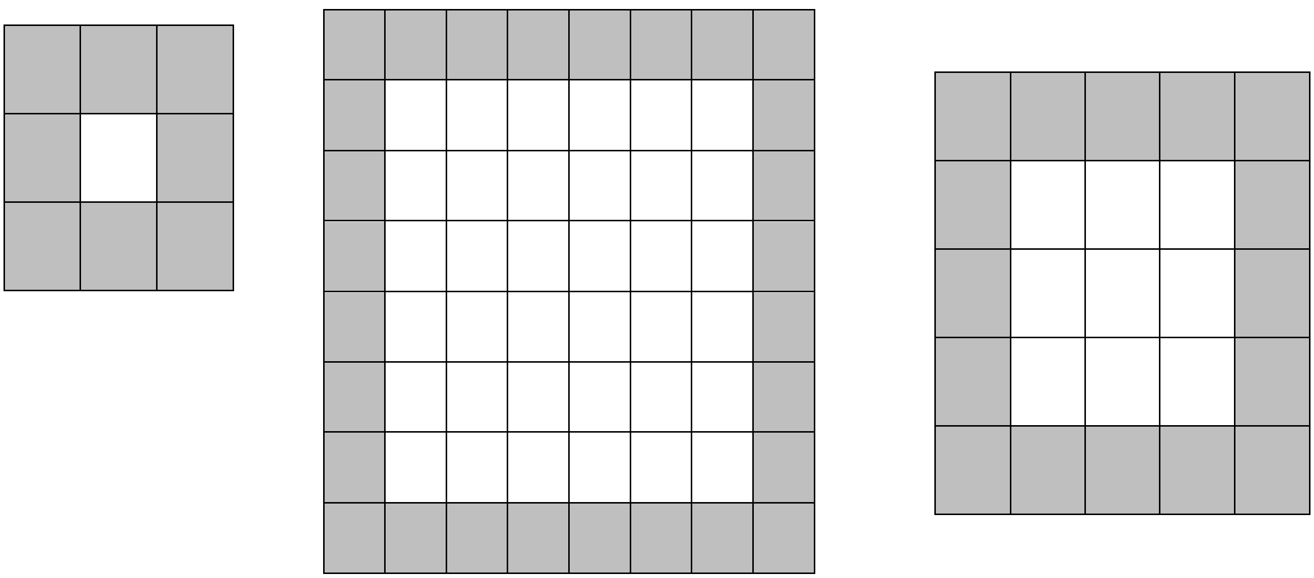
Source: *Julie Bizier, enseignante en math-sciences, École secondaire de la Haute Beauce, 20*

ANNEXE E

USINE À FENÊTRES

Dans une usine, on fabrique des fenêtres carrées avec des carreaux clairs au centre et des carreaux colorés autour. Il y a des ouvriers qui s'embêtent à compter un par un le nombre de carreaux colorés nécessaire à la fabrication d'une fenêtre. Le directeur de l'usine veut uniformiser un processus pour connaître le nombre de chaque carreau nécessaire. Il te demande de trouver une façon de calculer rapidement le nombre de carreaux colorés qu'il faut mettre pour n'importe quelle grandeur de fenêtre.

Exemples de fenêtres:



Explique dans tes mots la façon dont les ouvriers doivent s'y prendre pour trouver le nombre de carreaux colorés nécessaires à la fabrication d'une fenêtre d'une grandeur quelconque. Cette façon doit être valable pour n'importe quelle grandeur de fenêtre.

Ta façon de faire:

ANNEXE F

SCHÉMATISATION DU PROBLÈME 1 PAR L'ENSEIGNANTE